Die Mathematik auf dem Weg durch die Zeit

E.Hlawka *

Einleitung, vorgriechische Mathematik, bis Euklid

Gehen wir als Grundlage vom gegenwärtigen Lehrplan in Mathematik (für die Unterstufe) an den Allgemeinbildenden Höheren Schulen aus, so sehen wir folgende mathematischen Wörter und Begriffe; dabei soll die Übersicht nur sehr kursorisch sein: Punkt, Strecke, natürliche Zahlen, Brüche, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, das Wort Funktion und das Wort Menge. Dann folgen Flächeninhalte von gewissen geometrischen Figuren, der Umfang der Kreislinie und der Inhalt der Kreisfläche. Wir finden dann, vor allem in der zweiten Klasse, Bewegungen, kongruente Figuren, Dreiecke, Rechtecke und den Begriff des Winkels, die Teilbarkeit von ganzen Zahlen, größter gemeinsamer Teiler und kleinstes gemeinsames Vielfaches und die Primzahlen. Dann die Winkelssumme im Vieleck, die Zerlegung des Vielecks in Dreiecke, das regelmäßige Sechseck und Achteck, das Prisma, die Pyramide, den Zylinder und die Kugel. In der dritten Klasse finden wir dann die Menge der ganzen Zahlen und die Menge der rationalen Zahlen. Dann tritt die Algebra auf und die Flächenverwandlungen, insbesondere die Flächen verwandlung eines Polygons in ein Viereck bzw. Dreieck. Es kommt nun der pythagoräische Lehrsatz und der Begriff der irrationalen Zahlen. Die vierte Klasse bringt lineare Gleichungen, Textgleichungen, Ähnlichkeit, den Strahlensatz und erneut den Pythagoräischen Lehrsatz. (Man vergleiche auch mit älteren Lehrplänen z.B. mit jenen aus 1901. Diese zitieren auch mathematische Literatur. Es werden zitiert: A. Pringsheim, Irrationalzahlen und unendliche Prozesse, Math. Enzyklopädie I; (1899), P. Stäckel und F. Engel, Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis zu Gauss (Leipzig) 1885. Diese Hinweise verdanke ich Frau OStR. Dr. Martha Müller).

---

* Vortrag gehalten am Lehrerfortbildungstag, 24.4.1987, TU Wien

bis Euklid

Dieser Stoff (er wird in der Unterstufe der AHS behandelt), den ich hier aufgeführt habe, ist im wesentlichen der Inhalt der Mathematik wie er sich geschichtlich bei den Hochkulturen, vor allem in Ägypten, im Zwischenstromland Mesopotamien und in Indien ungefähr um das Jahr 2000 v. Chr. zeigt. Allerdings ist es erst eine Errungenschaft der letzten Jahrzehnte, daß der Begriff der Menge so in den Vordergrund gestellt wird. Weiter ist abzusehen vom Begriff der negativen Zahlen, die erst im 16. und 17. Jahrhundert voll in den Unterricht eindringen. Um dies noch deutlicher zu machen, wollen wir jetzt eine kurze historische Übersicht geben.

Die Entwicklung der Mathematik beginnt, soweit wir das feststellen können, ungefähr in der Jungsteinzeit, allerdings ist die Datierung in den verschiedenen Teilen der Welt verschieden. Wir können in Ägypten, im Zwischenstromland und in Indien die Entwicklung der Jungsteinzeit um 7000 v. Chr. datieren, in Nord und Mitteleuropa ungefähr um das Jahr 2000 v. Chr.,(es findet sich allerdings z.B. im Traisental eine hochentwickelte Kultur bereits um 6000 v. Chr.). Wir finden eine allmähliche Entwicklung des Zahlenraumes, so wie wir das heute in der Schule machen. Zunächst tauchen die Zahlen von 1 bis 9 auf, dann erstreckt sich der Zahlenraum bis 90, 900, 9000, bis zu 10^6. Das trifft ungefähr 1554 v.Chr. im Neuen Reich in Ägypten zu. Besonders entwickelt finden wir die Mathematik im Gebiet zwischen Euphrat und Tigris, bei den Sumerern, um etwa 3000 v. Chr. Wir wissen nicht, woher sie kamen, sie sind jedenfalls eingewandert, es besteht die Hypothese, daß sie aus Persien oder aus Indien gekommen sind und ihre mathematischen Kenntnisse mitgebracht haben. Diese Kultur wird von den Babyloniern und anderen Völkern fortgesetzt.

Welche mathematischen Kenntnisse finden wir bei diesen Völkern? Wir finden Formeln für das Quadrat und die dritte Potenz von $a + b$, dann Lösungen von quadratischen Gleichungen. Diese Aufgaben erhalten sie in der Form $x \cdot y = c$, $x + y = b$, die sie in 13 Typen einteilen, weil ihnen die negativen Zahlen nicht zur

Verfügung stehen, Näherungsformeln für die Quadratwurzel

$$\sqrt{a^2+b} \sim a + \frac{b}{2a}.$$

Natürlich lineare Gleichungen $ax = b$ in verschiedenen Formen, lineare Gleichungssysteme, das Volumen des Pyramidenstumpfes, Formeln für den Flächeninhalt des Dreiecks und des Trapezes, die allerdings bei den Ägyptern fehlerhaft angegeben sind. In Keilschrifttexten bei den Babyloniern finden wir die Anwendungen des Pythagoräischen Lehrsatzes, wobei sie Quadratwurzeln bereits ziemlich genau berechnen. Für die Quadratwurzeln selbst sind Tabellen angelegt. Hier erwähnen wir noch die pythagoräischen Trippel (x,y,z) mit $x^2 + y^2 = z^2$ (und 3. Wurzeln). Allerdings bringen sie diese Gleichungen und Formeln nur in Worten. Man sagt heute, daß die Mathematik damals in der rhetorischen Ära war. Die Beispiele waren aus dem Alltag genommen, z.B.: Ein Bauer verkauft 5 Säcke Weizen. Ein Sack kostet a Einheiten. Wie groß ist sein Ertrag? Oder z.B.: Ein Sack Weizen und 10 Einheiten sind 39 Währungseinheiten wert, wieviel ist der Sack wert? Allerdings sind die Aufgaben oft nur scheinbar aus dem Alltagsleben genommen, da die auftretenden Zahlen bedeutend höher sind, als im Alltagsleben üblich. Dies ist vor allem bei den Indern der Fall, die in 100.000 und Millionen Einheiten schwelgen. Die zu benützenden Regeln werden in Merkregeln, bzw. direkt in Versen, in langen schwungvollen Gedichten formuliert.

Hier zeigt sich deutlich, daß die Mathematik nicht nur aus praktischen Gründen entstanden ist, sondern auch der Wunsch, Erkenntnisse zu gewinnen, eine bedeutende Rolle gespielt hat. Die Zahl Null tritt nur ganz vereinzelt in Ägypten und in Babylonien auf. Es ist ja bekanntlich das Verdienst der Inder, die negativen Zahlen und die Null in die Mathematik eingeführt zu haben.

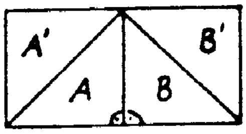
Ein System von mathematischen Sätzen und auch Beweisen der Sätze findet sich erst bei den Griechen, wenn man von einzelnen Beweisen bei den Ägyptern und Babyloniern absieht. Der erste, der Beweise vorgenommen hat, war Thales von bis Euklid

Milet (ca.624-548 v.Chr.). Die Schule um Thales und Pythagoras von Samos (ca. 580-500 v.Chr.) hat als Beweisprinzip in der Geometrie den Begriff der Bewegung benützt. Ob Pythagoras selbst mathematische Sätze und Beweise durchgeführt hat, ist sehr umstritten, aber als sicher kann angenommen werden, daß ein Teil seiner Schüler, Mathematikoi genannt,(im Gegensatz zu den Akusmatikern, ("Er hat es gesagt“) vgl. van der Waerden - Die Pythagoräer - Artemis Verlag, Zürich und München (1979) 505 S.) ein mathematisches Lehrsystem aufgebaut haben. Pythagoras selbst ist aber eigen, die Welt durch Zahlen zu beschreiben und zu messen. Es war für seine Schüler ein großer Schock, als sich herausstellte, daß sich im rechtwinkeligen gleichschenkeligen Dreieck die Hypothenuse sich durch die Seite nicht messen läßt, daß also die Wurzel aus 2, modern gesprochen, irrational ist.* Die deutschen Mathematiker H. Hasse (1898 - 1982) und H. Scholz (1884 - 1956) haben mit Recht von einer Grundlagenkrise des Altertums gesprochen. Diese ganze Problematik hat die Platonische Akademie in Athen beschäftigt und eine Lösung dieser Frage hat erst Eudoxus von Knidos (408 - 355) gegeben. Diese Theorie wird in den Elementen von Euklid von Alexandria (365 - 300 v. Chr.) dargestellt.

Diese Elemente stellen die Zusammenfassung der Mathematik dar, wie sie damals vorhanden war. Die Geschichte der Mathematik vor Euklid wurde vielfach untersucht. Ich möchte vor allem auf die Untersuchungen des Schweizer Mathematikers Neuenschwander, einem Schüler von van der Waerden hinweisen. Ich möchte nur

* Ein neuer Beweis von M. Köcher (Münster) geht so: Angenommen, es sei $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ und es sei n minimal. Es ist, da $1 < \sqrt{2} < 2$, $n < m < 2n$. Dann ist, da $m = \sqrt{2}n$, $(m - n)\sqrt{2} = 2n - m$, also $\sqrt{2} = \frac{2n-m}{m-n}$, wo der Nenner $m - n < n$ ist, also ein Widerspruch, da n minimal war. Eine Verallgemeinerung vom Verfasser dieser Arbeit lautet so: Es sei D aus N und kein Quadrat. Es gibt dann ein k aus N mit $k < \sqrt{D} < k + 1$. Es ist $\sqrt{D} = \sqrt{D}\frac{\sqrt{D}-k}{\sqrt{D}-k} = \frac{D-k\sqrt{D}}{\sqrt{D}-k}$. Es sei nun $\sqrt{D} = \frac{m}{n}$ und n minimal. Es folgt aus der vorhergehenden Gleichung $\frac{m}{n} = \frac{Dn-km}{m-kn}$. Es ist $\sqrt{D} > k$ also $m - kn > 0$. Andererseits ist $\sqrt{D} - k < 1$ also $m - kn = (\sqrt{D} - k)n < n$, also ist n nicht minimal. Es ist also $\sqrt{D}$ irrational.

zwei Beispiele hervorheben, nämlich die Winkelsumme im Dreieck und den Satz, daß der Flächeninhalt des Dreiecks gleich Grundlinie mal halbe Höhe ist. Es ist ja an sich nicht selbstverständlich, daß die Winkelsumme im Dreieck 180° ist. Dies hat man wohl zuerst beim gleichseitigen Dreieck erkannt und zwar als Teilfigur des regelmäßigen Sechseckes, wo man die Winkelsumme sofort sieht. Beim gleichschenkeligen Dreieck wird man es wohl an den "Zick-Zack-Mustern" der Vasen erkannt haben. Eine mögliche Konstruktion, die vielleicht Thales verwendet hat, könnte so aussehen ($A \approx A', B \approx B'$)



Allerdings hat man schon bald erkannt, daß diese Methode von Thales, mit Bewegungen zu arbeiten, die Richtigkeit des Satzes erkennen läßt aber keinen Beweis darstellt. Es ist wohl die Leistung von Eudoxus erkannt zu haben, daß man zum Beweis dieses Satzes ein Postulat benötigt, nämlich das berühmte Parallelenpostulat, daß es zu jeder Geraden und zu jedem Punkt, der nicht auf dieser Geraden liegt, genau eine Parallele gibt, die durch diesen Punkt verläuft. Auf der Kugel und in der nichteuklidischen Geometrie ist ja bekanntlich der Satz von der Winkelsumme im Dreieck falsch.

Frühzeitig treten in der griechischen Mathematik, wie in der Wissenschaft überhaupt Persönlichkeiten als Forscher und Lehrer hervor, im deutlichen Gegensatz zu Ägypten und Babylonien, wo wir nur den Berufsstand der Schreiber kennen, die die mathematischen Regeln als Diener des Staates verwenden. Wir kennen aber nicht die Persönlichkeiten, die diese Regeln aufgestellt, bzw. gesammelt haben. Es werden dies wohl Priester oder hohe Beamte oder große Baumeister gewesen sein. Einer dieser Meister könnte vielleicht Imhotep gewesen sein, der unter der Regierung von König Zoser (2600 v.Chr.) gewirkt hat. Auch von den Schulen für diese Schreiber, die es sicher gegeben hat, wissen wir nichts Genaues. Dies ist, wie gesagt, bei den Griechen ganz anders. Besonders bemerkenswert in der griechischen Kultur ist die hohe Wertschätzung, die die Mathematik genießt. Dies zeigt auch ganz deutlich die Sage, daß Prometheus den Menschen nicht nur die Sprache, sondern auch die Zahlen von den Göttern weitergegeben hat. Es ist auch bekannt, wie hoch Platon (427–347 v.Chr.) und seine Akademie in Athen, die Mathematik geschätzt haben. Man denke nur an die Dialoge Timaios und Theaitetos, wo die Dreiecke bzw. die Irrationalzahlen eine wichtige Rolle spielen (Heisenberg wurde von "Timaios" zur Weltformel geführt).

Euklid

Wie schon vorher gesagt, wird dann das damals vorhandene gesammelte Wissen von Euklid in Alexandria in den Elementen (der Stocheia) (Reihenfolge) zusammengefaßt. Nach der arabischen Überlieferung wurde Euklid in Thyros (im heutigen Libanon) als Sohn eines Hafenaufsehers geboren. Weiters sagt der Kommentator Proclus (450 n.Chr.) folgendes: "Wenig jünger als diese (Mathematiker der Akademie) ist Euklid, der die Elemente schrieb, der dabei vieles aus Eudoxos verwendet, vieles von Theaitetos Behandelte zum Abschluß brachte und was von den Früheren nur oberflächlich dargestellt war, durch unanfechtbare Beweise stützte. Dieser Mann lebte zur Zeit des ersten Ptolemaios; denn Archimedes, der nach dem ersten kam, erwähnt den Euklid; auch erzählt man, daß Ptolemaios ihn einmal nach einem kürzeren Weg durch die Geometrie als das Elementenwerk gefragt habe; er habe darauf geantwortet, einen besonderen Zugang für Könige zur Geometrie gebe es nicht. Er ist jünger als der Platonische Kreis und älter als Eratosthenes und Archimedes."

Dieses Werk besteht aus dreizehn Büchern, enthält aber keine Einleitung und beginnt sofort im 1. Buch mit Definitionen (besser Erklärungen): *

---

* Diese Definitionen haben zur modernen Dimensionstheorie (Poincaré, Brouwer,

Euklid

Definition 1: Ein Punkt ist, was keine Teile hat. Eine andere Übersetzung lautet: Punkt ist, dessen Teil nichts ist.

Definition 2: Eine Linie ist eine breitenlose Länge.

Insgesamt werden 23 Definitionen gegeben, dann folgen fünf Postulate. Dieser Teil beginnt so: Gefordert soll sein:

1. Daß man von jedem Punkt nach jedem Punkt die Strecke ziehen kann.

2. Daß man eine begrenzte gerade Linie zusammenhängend gerade verlängern kann.

3. Daß man mit jedem Mittelpunkt und Abstand den Kreis zeichnen kann.

4. Daß alle rechten Winkel einander gleich sind.

Das 5. Postulat ist das Parallelenpostulat (oft auch das 11. Postulat genannt), das wir schon vorher genannt haben. Euklid selbst drückt sich in folgender sehr bemerkenswerter Weise aus: "Und daß, wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, daß innen auf derselben Seite entstehende Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte werden, dann die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins Unendliche sich treffen auf der Seite, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind."

Dann folgen Axiome:

1. Was demselben gleich ist, ist auch einander gleich: $A \equiv B, C \equiv B \rightarrow A \equiv C$

2. Wenn Gleichem Gleiches hinzugefügt wird, sind die Ganzen gleich: $A \equiv B \rightarrow A + C \equiv B + C$

3. Wenn von Gleichem Gleiches weggenommen wird, sind die Reste gleich: $A+C \equiv B + C \rightarrow A \equiv B$

Menger, Uryson) angeregt. Ihr Zweck war wohl, unendlich kleine Größen auszuschließen und gegen die Argumente von Zenon (490-430) gerichtet.

Euklid

7. Was einander deckt, ist einander gleich: A kongruent zu $B \rightarrow A \equiv B$

8. Das Ganze ist größer als der Teil

Heute faßt man auch die Postulate mit den Axiomen zusammen (das Wort Axiom kommt bei Euklid noch nicht vor). Man nimmt an, daß die Postulate an seine Schüler in der Vorlesung – das Buch ist sicher aus Vorlesungen hervorgegangen – als Mittel der Konstruktion gerichtet waren, während diese Gleichheitsaxiome als allgemeine Denknotwendigkeiten aufgefaßt wurden. Euklid vermeidet nach Möglichkeit, mit dem Begriff der Bewegung explizit zu operieren, obwohl dieser Begriff (der Begriff der Kongruenz) im 4. Postulat und im 7. Axiom deutlich sichtbar ist. Euklid bemüht sich nun, aus diesen Axiomen und Postulaten durch rein logische Operationen die Sätze der Geometrie, genauer gesagt, die Sätze der Mathematik, herzuleiten. Er bespricht nicht nur geometrische Objekte, sondern leitet auch Gesetze über Zahlen her. Hier steckt ein altes pythagoräisches Erbe. Allerdings hat er für die Zahlen keine Axiome aufgestellt, dies findet sich erst bedeutend später bei Kommentatoren von Euklid. Es wäre nun reizvoll, den Inhalt dieser dreizehn Bücher im einzelnen zu besprechen. Das ist natürlich im Rahmen dieses Vortrages unmöglich. Es sollen aber einige Punkte herausgegriffen werden, die zeigen, wie Euklid seine Beweise führt, und ich erlaube mir, einige Beispiele anzuführen, die ich aus der Inhaltslehre und aus der Zahlentheorie nehme, weil hier die Erklärungen kürzer erfolgen können.

Ich erwähne nur den euklidischen Algorithmus, der ja sprichwörtlich geworden ist, aber auch den Beweis, daß es unendlich viele Primzahlen gibt, der wohl, wie der englische Mathematiker Hardy gesagt hat, zu den schönsten Beweisen der Mathematik, neben dem Beweis der Irrationalität von Wurzel aus 2 gehört. Dieser Beweis ist ja wohlbekannt, aber ich möchte nur die Formulierung des Satzes bringen: *Es gibt mehr Primzahlen als jede vorgelegte Anzahl von Primzahlen.* Man sieht, wie er das Wort unendlich vermeidet, wie dies ja typisch für die Griechen war. In diesem Zusammenhang geben wir gleich die Definition der Zahl im 7. Buch:

Definition 1: Einheit ist das, wonach jedes Ding eines genannt wird.

Definition 2: Zahl ist die aus Einheiten zusammengesetzte Menge.

Euklid gibt noch weitere Definitionen. Insgesamt sind es 118 Definitionen. Am berühmtesten ist die Definition im 5. Buch, Definition 5, die von Eudoxus herrührt: *Man sagt, daß Größen in demselben Verhältnis stehen, die erste zur zweiten wie die dritte zur vierten, wenn bei beliebiger Vervielfältigung die Gleichvielfachen der ersten und dritten den Gleichvielfachen der zweiten und vierten gegenüber, paarweise entsprechend genommen, entweder zugleich größer oder zugleich gleich oder zugleich kleiner sind,* also $a : b = c : d$ wenn stets aus $ka \lesseqgtr lb$ folgt $kc \lesseqgtr ld$ für alle natürlichen Zahlen k und l und umgekehrt. Diese Definition ist modern gesprochen der Dedekindsche Schnitt und sie ist als eine der größten Leistungen von Eudoxus zu bezeichnen. Es ist an sich ein Axiom und man nennt es seit Hilbert das Vollständigkeitsaxiom, oder auch Stetigkeitsaxiom. Dabei wird noch ein weiteres Axiom benützt, das bei Euklid nicht explizit aufgeschrieben ist, welches man das Archimedische Axiom, oder auch das Axiom von Eudoxus nennt. H. Freudenthal (geb. 1905) sagt: *Es ist ja modern, einen Satz oder ein Axiom in eine Definition zu stecken.* Es ist dies wohl eine Anspielung auf Bourbaki.

Wir wollen nun kurz auf den Inhaltsbegriff bei Euklid eingehen. Er unterscheidet an sich nicht zwischen einer Strecke und der Länge einer Strecke, zwischen dem Inhalt eines Rechtecks und dem Rechteck selbst, wie wir das ja auch in der Schule, jedenfalls in der Unterstufe, zu tun pflegen. Es ist nun sehr bemerkenswert, wie er zu dem Flächeninhalt eines Polygons kommt. Er geht nicht von der Definition – Flächeninhalt eines Rechtecks ist $l \cdot b$ – welche ja unmittelbar gar keine geometrische Bedeutung hat, aus, sondern er geht von den Axiomen aus, modern gesprochen, verlangt Euklid vom Flächeninhalt eines Polygons folgende

Eigenschaften: Nämlich daß kongruente Figuren den gleichen Inhalt haben – das ist ja das Axiom 7 – und weiters – das ist der Inhalt von Axiom 2 und 3 – daß der Flächeninhalt eine additive Mengenfunktion ist, d.h. daß der Flächeninhalt von zwei Polygonen,(die keine inneren Punkte gemeinsam haben), gleich ist der Summe der Flächeninhalte. Es ist also $J(P+Q) = J(P) + J(Q), P \cap Q = 0$ Nun zeigt er – indem er die Polygone in Dreiecke zerlegt und überhaupt die Figuren passend zerschneidet oder zusammenklebt – den folgenden Hauptsatz: Zu jedem Polygon gibt es zu gegebener Strecke e ein flächengleiches Rechteck, dessen eine Seite e ist, sodaß die andere Seite als Maß für die Fläche des Polygons dienen kann. Dann folgt mit Hilfe des Axioms 8 – welches lautet: *Das Ganze ist größer als der Teil* – daraus: Haben zwei Polygone bei Verwandlung in das flächengleiche Rechteck mit der Basis e die gleiche Länge, so haben sie gleiche Fläche. Sind diese Seiten voneinander verschieden, so haben auch die Polygone verschiedene Flächeninhalte und zwar hat das eine Polygon den größeren Flächeninhalt als das andere Polygon, wenn die zugehörige Seite des 1. Polygons größer als die Seite des 2. Polygons ist. Diese Definition ist nicht nur praktisch von Bedeutung, sondern auch theoretisch. Leider können wir auf diesen Punkt nicht weiter eingehen. An dieser Stelle möchte ich auf meinen Artikel *Zur Geschichte des Inhaltsbegriffes* (Didaktikreihe der ÖMG, Heft 2, (1-56)(1980)) verweisen.

Folgendes sei noch bemerkt: diese Definition des Inhalts als additive Mengenfunktion ist genau das, was jetzt in der Schule als Maßraum (abgesehen vom Axiom 7) zur Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung eingeführt wird. Besonders wichtig für die Geschichte der Mathematik ist auch das sechste Buch, wo mit Hilfe der Ähnlichkeit erst hier der Satz gezeigt wird: Rechtecke mit gleicher Höhe verhalten sich wie die Grundlinien. Dies läuft, mit anderen Worten, auf das Studium der sogenannten Cauchyschen Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x) + f(y)$ hinaus, unter der Voraussetzung, daß die Funktion nicht negativ ist. Aus diesen Voraussetzungen folgt, daß die Funktion $f(x) = c \cdot x$ eine lineare Funktion ist, und durch zweimalige Anwendung dieses Satzes zeigt Euklid den Satz, den man ja heute im der Schule als Definition benützt: Hat man zwei inhaltsgleiche Rechtecke mit den Längen a und a_1 und den Breiten b und b_1, dann gilt die Proportion $a : a_1 = b_1 : b$ Wir schreiben heute $a \cdot b = a_1 \cdot b_1$. Im 11. Buch wird der Flächeninhalt des Kreises und das Volumen der Pyramide nach der Methode von Eudoxus mit Hilfe der Exhaustionsmethode (der Name stammt aus dem 17. Jahrhundert) also mit Hilfe der Infinitesimalrechnung behandelt, also modern gesprochen, mit Hilfe der Intervallschachtelung.

Man hat oft diskutiert, was das Ziel der Elemente ist. Man kann wohl mit Recht sagen, daßdie Konstruktion der regelmäßigen Polyeder, insbesondere des Ikosaeders, einer der Höhepunkte des Buches ist. Um die Kanten dieser Polyeder bestimmen zu können, muß ein umfangreicher geometrisch- algebraischer Apparat entwickelt werden. Es werden ineinandergeschachtelte Quadratwurzeln bis zur 3. Ordnung d.h. bis zu den achten Wurzeln diskutiert und klassifiziert. Ein Haupthilfsmittel ist die Formel:

$$\sqrt{\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\alpha - \beta}}{2}} \pm \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\alpha - \beta}}{2}}$$

die auch in der Geschichte der Mathematik eine wichtige Rolle gespielt hat. Mit diesen Andeutungen will ich mich begnügen. Es ist auch heute noch empfehlenswert, Euklid zu lesen. Es gibt eine Ausgabe in deutscher Sprache von Clemens Thaer, die in der wissenschaftlichen Buchgesellschaft in Darmstadt 1980 neu aufgelegt wurde. Selbstverständlich gibt es sehr viele Ausgaben. Es ist ja dieses Buch, nach der Bibel, das am meisten verbreitete Werk. Es diente lange Zeit als Lehrbuch für die Schulen. Es wurden im allgemeinen nur die einfachsten Dinge behandelt, denn das Buch ist, wie der deutsche Mathematiker W. Franz gesagt hat, sehr lakonisch geschrieben. Auch dieses große scharfsinnige Werk hat vom modernen Standpunkt aus gesehen noch Unvollkommenheiten. Es fehlen bei ihm

Axiome über den Zwischenbegriff, daß ein Punkt auf einer Geraden zwischen zwei anderen Punkten liegt. Bekanntlich hat der deutsche Mathematiker M. Pasch eine vollständige Liste von Axiomen über den Zwischenbegriff erstellt. Der Mathematiker H. Guggenheimer (Dialectica 31(1977), 187-192) hat aber bemerkt, daß man die Sache so in Ordnung bringen kann: C liegt zwischen A und B, wenn gilt $AC + BC = AB$. Daß Euklid zwischen einer Strecke und der Länge einer Strecke nicht unterscheidet, haben wir ja schon bemerkt, das ist aber von seinem Standpunkt aus durchaus korrekt, da ja die Längen ein eigenes Größensystem bilden, das gleiche gilt für die Flächen und Volumina.

Archimedes

Wenden wir uns nun dem Werk des größten Mathematikers des Altertums, Archimedes (287-212 v.Chr.) zu. Es ist unmöglich, sein Werk im einzelnen zu besprechen, wir können nur einige Punkte hervorheben. Zunächst wollen wir seine Werke aufzählen.

1. Über Spiralen

2. Kugel und Zylinder

3. Die Quadratur der Parabel

4. Über Drehparaboloide, Hyperboloide und Ellipsoide (Über Konoide und Sphäroide)

5. die Sandzahl

Er hat noch weitere Arbeiten verfaßt, die der Mechanik angehören, z.B.über das Gleichgewicht ebener Flächen und über schwimmende Körper. Eine Arbeit beschäftigt sich mit der Kreismessung, eine Schrift, die erst 1906 entdeckt wurde heißt "Über die Methode"*. Diese Schriften haben meistens die Anrede: Archimedes grüßt den Dositheus. In diesen Werken, die wir jetzt zitiert haben, gibt er Berechnungen für die Umfänge von Kurven, für die Oberfläche von Flächen, Flächeninhalte und Volumsberechnungen. Die Beweise sind vollkommen exakt, in euklidischer Manier durchgeführt, Archimedes hat vielleicht in Alexandria studiert, jedenfalls kennt er noch Schüler von Euklid. Er hat sich allerdings auch oft über den Hochmut der Schule von Alexandria lustig gemacht, vor allem darüber, daß ihre Professoren sagten, das, was er entdecke, hätten sie schon alles gewußt. Er hat ihnen manchmal falsche Behauptungen geschickt, um sie irrezuführen. Er hatte damit auch Erfolg. Er besitzt schon die modernen Methode der Ober- und Untersumme, wie sie erst von G.Darboux eingeführt wurden, es war daher eine umso größere Überraschung, als man 1906 die vorher genannte Schrift entdeckte, wo er mit unendlich kleinen Größen operiert. Man kann daher annehmen, daß er sich die Resultate, die er in seinen Schriften auf so kunstvolle Weise gefunden hat, zuerst mit der heuristischen Methode überlegt hat.

Greifen wir zwei Dinge heraus, die von grundsätzlicher Bedeutung sind:

Zuerst die Sandrechnung, eine Schrift, die meines Erachtens auch für die Schule instruktiv ist. Ich zitiere:

"Etliche glauben, König Gelon, daß die Zahl der Sandkörner unendlich sei. Ich spreche dabei nicht allein vom Sand in Syrakus und im übrigen Sizilien, sondern auch von dem Sande der ganzen bewohnten und unbewohnten Erde. Andere gibt es, die zwar nicht der Ansicht sind, daß die Zahl der Sandkörner unendlich sei, die aber meinen, daß es keine so große Zahl gebe, die die Zahl der Sandkörner übertreffe." Die Methode, die er benützt ist einfach: er konstruiert der Reihe nach Potenzen von 10^8, die größte Zahl, die er dabei numeriert ist 10^A, wobei $A = 63$ ist. Die Lektüre dieser Arbeit ist nicht nur für die Lehrer, sondern auch für die

* Eigentlich: Methode mechanisch herleitbarer Sätze, Erathostenes mitgeteilt

Schüler sehr lesenswert und sei daher empfohlen. Bei seinen Untersuchungen für die Berechnung von Längen und Flächeninhalten benützt er einige Postulate, so in dem Buch "Kugel und Zylinder" und ich will von den fünf Postulaten drei hervorheben: Archimedes sagt: "Ich setze voraus":

1. Von allen Linienstücken, die gleiche Endpunkte haben, ist die gerade Linie die kürzeste (also eine geodätische Linie).

2. Die übrigen Linien aber, die in einer und derselben Ebene liegen und dieselben Endpunkte haben, sind einander ungleich, wenn sie nach der gleichen Seite konkav sind und die eine ganz von der anderen und der geraden Verbindungslinie der Endpunkte umfaßt wird oder teilweise umfaßt wird, teilweise mit einer der beiden Linien identisch ist. Und zwar ist diejenige, welche umfaßt wird, die kleinere.

Das heißt, kurz gesagt, wenn eine Linie die andere einschließt und beide Linien konkav sind, so hat sie die größere Länge. Wenn diese Linien nicht konkav sind, so sieht man sofort, daß der Satz falsch ist. Man kann sich auch leicht überlegen, obwohl Archimedes keinen Beweis gibt, wie man dies aus dem 1. Postulat herleiten kann.

Die Postulate 3 und 4 beziehen sich auf Flächen. Jetzt zitieren wir noch das 5. Postulat, das berühmte Archimedespostulat, von dem wir schon bei Euklid gesprochen haben.

5. Die größere von zwei gegebenen Größen, sei es Linie, Fläche oder Körper, überragt die kleinere um eine Differenz, die, genügend oft zu sich selbst addiert, jede Größe der gleichen Art übertrifft. In Formeln: Es sei $a > b$, dann gibt es für jedes c ein $n \in N$ so da$\beta c < n(a-b)$ gilt. Es sei bemerkt, daß a,b,c z.B. ganz beliebige Längen (auch von krummen Kurven) sind, zum Unterschied von Eudoxus. Es hat dann $a - b$ eigentlich keinen Sinn. (Auf diese Tatsache hat Hjemslev aufmerksam gemacht). Unter diesen Voraussetzungen ist ersichtlich, daß, wenn in einen Kreis ein Vieleck eingeschrieben wird, der Umfang des eingeschriebenen

Vielecks kleiner ist als die Peripherie des Kreises." Denn jede der Vielecks seiten ist kleiner als das Stück der Kreisperipherie, das von ihr abgeschnitten wird". Man sieht also, wie Archimedes diese Dinge, die doch so anschaulich sind, genau formuliert. Gehen wir jetzt gleich zur "Kreismessung" über.

Diese Arbeit beginnt mit folgendem Satz: Jeder Kreis ist einem rechtwinkeligen Dreiecke inhaltsgleich, insofern der Radius gleich der einen den rechten Winkel einschließenden Seiten, der Umfang aber gleich der Basis ist. Was hier behauptet wird ist folgendes: Der Flächeninhalt des Kreises vom Radius r ist $r^2\pi$ und der Umfang ist $2\pi r$. Über diese Zahl π (die Bezeichnung π stammt von Euler) macht er noch folgende Aussagen: nämlich, daß sie zwischen $\frac{22}{7}$ und $\frac{220}{71}$ liegen muß. Historisch sind folgende Dinge zu bemerken:

1. Es ist das Verdienst von Archimedes, gezeigt zu haben, daß diese Zahl π, die im Umfang für den Kreis und für den Flächeninhalt vorkommt, die gleiche Zahl ist. Bei den alten indischen Mathematikern findet sich diese Tatsache noch nicht ausgesprochen. Die Ägypter und Babylonier haben für diese Zahl π verschiedene Näherungwerte, die älteste dürfte wohl die Näherung $\pi = 3$ sein. So findet es sich auch in der Bibel. Bei Euklid ist nur bewiesen, daß die Flächeninhalte von zwei Kreisen mit Radius r und r_1 sich so verhalten, wie die Quadrate der Radien. Auch dies ist nicht selbstverständlich und gilt nur unter der Benützung des Parallelenpostulats.

In der nichteuklidischen Geometrie, wo das Parallelenpostulat nicht gilt, gilt für den Umfang eines Kreises die Formel $2\pi \sinh r$ also in Potenzreihen entwickelt $2\pi r(1 + \frac{r^2}{6} + \cdots)$ für den Flächeninhalt $2\pi(\cos hr - 1) = \pi r^2(1 + \frac{r^2}{3.4} + - \cdots)$. Auf der Sphäre mit Radius 1 gelten dieselben Formeln, nur sind die hyperbolischen Funktionen durch die gewöhnlichen trigonometrischen Funktionen zu ersetzen.

Legt man auf einer Fläche um einen festen Punkt P einen Kreis mit dem Radius r, so gilt für den Umfang dieses Kreises, wenn man ihn abmißt, die Formel $2\pi r(1 -$

$\frac{K(P)r^2}{6}+\ldots$). So kann man in jedem Punkt P auf einer Fläche messen, wie stark die Umgebung dieses Punktes von der euklidischen Geometrie abweicht und das Maß, gegeben durch $K(P)$, heißt die Krümmung der Fläche in diesem Punkt.* Im nichteuklidischen Fall ist also $K=-1$ (die Krümmung ist negativ; auf der Sphäre ist K positiv). Genau dasselbe kann man im Raum machen, in dem auch die Krümmung in einem Punkt ein Maßstab ist, wie weit die Oberfläche einer Kugel vom archimedischen Wert $4\pi r^2$ bzw. das Volumen vom Wert $\frac{4\pi r^3}{3}$ abweicht. Sie bemerken, daß man die Formel für die Oberfläche durch Differentiation aus der Volumsformel erhalten kann. Das gilt auch für den vierdimensionalen Fall, aber als Faktor tritt hier nicht mehr π auf, sondern $\frac{\pi^2}{2}$.

Diese Eigenschaft der Krümmung spielt ja in der allgemeinen Relativitätstheorie von Einstein eine große Rolle und schon Riemann hat vermutet, daß die Schwerkraft die Geometrie in einem Punkt des Weltalls verändert. Geben wir noch einen Beweis für diesen Zusammenhang von Umfang und Fläche beim Kreis, wie dies Kepler in seinem Buch über das Volumen der Fässer dargestellt hat und auch Archimedes sich vorgestellt hat. Teilen wir den Kreis in unendlich schmale Dreiecke, deren Basen auf dem Kreis liegen und deren Spitze der Mittelpunkt ist. Reihen wir die Dreiecke auf einer Linie: Jedes Dreieck hat die Höhe r und die Grundlinien der Dreiecke aneinandergereiht haben die Länge des Umfanges $2\pi r$, also ist die Gesamtfläche des Kreises $\frac{1}{2}\cdot 2\pi r^2=\pi r^2$.

Die Näherungswerte für π, die Archimedes angibt, sind sehr genau, man vermutet, daß er sie nicht auf dem Weg gefunden hat, den er in seiner Arbeit angegeben hat,

* Es sei Δ ein (geodätisches) Dreieck mit den Winkeln α,β,γ und $F(\Delta)$ der Flächeninhalt dann ist im Limes

$$K(P)=\lim_{\Delta\to P}\frac{\alpha+\beta+\gamma-\pi}{F(\Delta)}.$$

Auf der Sphäre (RadiusR) $K=\frac{+1}{R^2}$ ist $F(\Delta)=(\alpha+\beta+\gamma-\pi)R^2$ (Th. Harriot 1603). Ein analoger Satz gilt für $K=\frac{-1}{R^2}$.

sondern daß er Näherungsbrüche der regelmäßigen Kettenbruchentwicklung von π benützt hat. Dieser lautet: (Man kennt bis heute nicht alle Glieder dieses Kettenbruches $[3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, \cdots]$). Ein nicht regelmäßiger Kettenbruch wurde von Lord Brounker (1620-1684) mit Hilfe des Produktes von Wallis für π

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1|}{|1+} \frac{1|}{|2+} \frac{3^2|}{|2+} \frac{5^2|}{|2+} \cdots$$

aufgestellt (bewiesen von Euler). Eine erste Produktdarstellung von π wurde von Vieta aufgestellt, die schönste Reihe, auch bis heute, ist die Reihe von Leibniz für $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \ldots$ Leibniz sagt voll Stolz: "Gott freut sich an den ungeraden Zahlen". π ist auch heute noch eine sehr geheimnisvolle Zahl, man hat erst vor einigen Monaten ihre Dezimalentwicklung durch Verwendung der modernsten Computer auf zwanzig bis dreißig Millionen vorangetrieben, man hat aber bis heute keine Gesetzmäßigkeit entdeckt. Die Computerfachleute glaubten eine Bevorzugung der Zahl 7 gefunden zu haben, dies hat sich aber bei weiterer Berechnung als Schein erwiesen und die Vermutung besteht, daß alle Ziffern von 1 bis 9 in der Dezimalbruchentwicklung mit gleicher Häufigkeit vorkommen.

Von Apollonius bis 1000 n. Chr.

Ein Zeitgenosse von Archimedes ist Apollonius von Perge (262-ca.190 v.Chr.). Apollonius ist in einer kleinen Stadt Perge an der Südküste Kleinasiens geboren. Es ist überhaupt bemerkenswert, daß die meisten Mathematiker, von Archimedes abgesehen, in Kleinasien und Ägypten gewirkt haben. Es scheint mir als bedeutungsvolle Tatsache, daß die Mathematik nicht nur in Kleinasien und Ägypten entstanden ist, sondern dort auch die größte Förderung in der Antike erhalten hat. Dies gilt vor allem für das damalige Zentrum der Wissenschaft, Alexandria.

Apollonius hat hauptsächlich in Alexandria, gewirkt. Sein Hauptwerk sind die *Conica* – das bedeutet Schnitte. Das Werk umfaßt acht Bücher, von denen allerdings das achte verloren ist. Es ist den Kegelschnitten gewidmet: Parabel, Ellipse und Hyperbel, wobei Apollonius die Scheitelgleichung $y^2 = 2px \pm \frac{p}{a}x^2$ dieser Kegelschnitte zugrundelegt, also die flächenmäßige Deutung dieser Kurven in den Vordergrund stellt. Archimedes dagegen benützt die Achsengleichung von Ellipse und Hyperbel und zwar in Form von Proportionen. Apollonius studiert unter anderem die Asymptoten der Hyperbel, Pol und Polare, die Brennpunkte und auch die projektive Erzeugung der Kegelschnitte. Wie man überhaupt annimmt, daß er in die projektive Geometrie der Kegelschnitte schon weit vorgedrungen ist. Leider ist das achte Buch nicht erhalten.

Die Theorie der Kegelschnitte ist für den Mathematiker ein Beispiel der Harmonie, die zwischen Mathematik und Physik herrscht, denn erst unter Kepler haben die Kegelschnitte ihre schönste Anwendung auf die Theorie der Planetenbahnen gefunden.

Apollonius hat seine Bücher dem damaligen König von Pergamon gewidmet, obwohl er in Alexandria gewirkt hat. Er soll deshalb in Alexandria in Ungnade gefallen sein.

Nicht nur die Kegelschnitte wurden in Alexandria studiert, sondern auch die Trigonometrie. Berühmt sind die trigonometrischen Tafeln von Ptolemäus (85 - 165 n. Chr). Er ist in Ägypten geboren und zwar in einer Stadt mit dem Namen Ptolemäus Hermaiu, also in einer Stadt, die nach dem Herrschergeschlecht benannt war (ein Beispiel aus der neueren Zeit wäre Petersburg). Er war der Leiter der Sternwarte in Alexandria. Seine trigonometrischen Tafeln wurden jetzt wieder neu aufgelegt. Berühmt ist seine *große Zusammenfassung*, die üblicherweise mit dem arabischen Titel *Almagest* (die größte) zitiert wurd. Das Werk umfaßt sechs Bücher.

Ganz aus der Art fällt dann das Werk von Diophant von Alexandria. Er war wahrscheinlich ein Phönizier, oder ein Ägypter. Er wirkte ungefähr um 250 n. Chr. Sein Werk, die "Arithmetica", umfaßt dreizehn Bücher, davon sind sechs Bücher erhalten und befinden sich in der Bibliothek des Vatikans, vier weitere Bücher wurden vor kurzem in arabischer Übersetzung in einer Moschee gefunden. Man denkt bei dem Namen Diophant an die diophantischen Gleichungen, also an die unbestimmten Gleichungen, dies ist aber nur zum Teil richtig. Es handelt sich bei seinem Werk um Algebra. Es ist wohl zu vermuten, daß die Algebra, wie sie in Babylon und in Ägypten zu finden war, weiterhin tradiert wurde, auch in der griechischen Zeit, aber darüber wissen wir eigentlich nichts Genaues. Das Werk von Diophant taucht plötzlich auf, ohne daß irgendwelche unmittelbaren Vorgänger angegeben werden könnten. Es werden nicht nur quadratische Gleichungen, sondern auch Gleichungen höheren Grades behandelt. Es finden sich hier die Regeln:

$$+\times+=+,\quad +\times-=-,\quad -\times+=-,\quad -\times-=+.$$

Man darf aber daraus nicht schließen, daß Diophant negative Zahlen (er nennt sie absurd) benützt hat, sondern es sind einfach Klammerregeln, die er aus der allgemeinen Formel $(a-b)(c-d)=ac-bc-ad+bd$ herausliest. Seine Gleichungen sind nicht mehr in Form von Propositionen hingeschrieben, wir finden Gleichungen bis zum 6. Grad, Gleichungen, die sich in den meisten Fällen auf quadratische Gleichungen reduzieren lassen. Die höheren Potenzen tragen die entsprechenden Namen. Die Unbekannten, die man heute nach Descartes mit x, y, z bezeichnet, bezeichnet Diophant mit einem Symbol, das man als s lesen kann. Zu den Diophantischen Gleichungen (unbestimmte Gleichungen) übergehend sind sie geometrisch gesehen Kurven oder Flächen 2. oder 3. Ordnung bzw. quadratische Formen in mehreren Unbekannten. Gesucht werden immer Lösungen dieser Gleichungen in rationalen (nicht, wie oft angenommen wird, in ganzen) Zahlen. Die Methode, die er benützt, um rationale Lösungen von kubischen Kurven zu erhalten, ist noch heute eine fundamentale Methode. Hat man zwei rationale Punkte (Punkte mit rationalen Koordinaten), so verbindet man diese beiden Punkte durch eine Gerade, dann muß der 3. Schnittpunkt (wenn die Koeffizienten der Kurve ganze Zahlen sind) natürlich wieder ein rationaler Punkt sein. Dies gilt auch dann, wenn die beiden gegebenen rationalen Punkte zusammenfallen. Dann ist die Gerade einfach die Tangente. Man nennt diesen Prozeß den Sehnen- Tangentenprozeß und man kann auf diese Art unendlich viele rationale Punkte erhalten. Diophant selbst gibt diese geometrische Einkleidung allerdings nicht. Es sei gleich noch bemerkt, daß wir seit zwei Jahren durch den Satz von Faltings wissen, daß es auf Kurven vom höherem als 3. Grad, wenn sie sich nicht auf kubische Kurven, auf Kegelschnitte oder Gerade zurückführen lassen, nur höchstens endlich viele rationale Punkte liegen können.

Er betrachtet auch Kurven von der Gestalt $f(x) - y.p = 0$ wo $f(x)$ ein Polynom ist. Z.B. $f(x) = x^2 - a$, modern gesprochen x^2 kongruent a modulo p, allgemein $f(x) \equiv 0 mod p$. Man nennt heute die Menge der Primzahlen p, für die eine Zerlegung von Linearfaktoren $(x - a_1) \cdots (x - a_n) mod p$ möglich ist, das Spektrum des Polynoms $f(x)$. Läßt sich dieses Spektrum, das im allgemeinen eine unendliche Menge von Zahlen ist, durch eine endliche Menge von Kongruenzen beschreiben, so sagt man, es liegt ein Reziprozitätsgesetz vor. Das bekannteste Beispiel aus

Apollonius,...

der elementaren Zahlentheorie ist das quadratische Reziprozitätsgesetz, welches aussagt, daß die Zerfällung modulo p nur davon abhängt, in welcher Restklasse p modulo 4a liegt. Dieses Gesetz wurde von Euler vermutet, von Legendre behandelt und von Gauß bewiesen. Man weiß heute durch E. Artin, daß dieses Spektrum sich genau dann durch Kongruenzen beschreiben läßt, wenn die Galois-Gruppe des Polynoms abelsch ist (Artinsches Reziprozitätsgesetz). *

Mit Pappus (um 320 n. Chr.) beginnt die Silberne Ära der Mathematik in Alexandria. Es gibt Sätze, die nach Pappus benannt sind, vor allem in den Grundlagen der Geometrie. Der Satz von Pappus ist ein Spezialfall des Satzes von Pascal, wenn die Kurve 2. Ordnung in zwei Gerade ausartet. Pappus dürfte mit dem Mathematiker Theon von Alexandria zusammengearbeitet haben, dessen Tochter Hypathia (370-415) durch bedeutende Werke (Kommentare zu Ptolemäus, Apollonius und Diophant) hervorgetreten ist, die uns zwar nicht explizit erhalten sind, die aber in den Werken des 12. und 13. Jahrhunderts aufgegangen sind.

Die Schule von Alexandria verliert nach der Gründung von Bagdad (645) an Bedeutung. Die Araber bringen die kulturellen Schätze aus Alexandria nach Bagdad. Vor allem Kalif Mansur und der aus den Märchen aus 1001 Nacht bekannte Kalif Harun al Rashid (760-809) sammelte systematisch die wissenschaftlichen Werke der Griechen. Sie werden auch ins Arabische übersetzt und in Bagdad bildet sich eine mathematische Schule, die hauptsächlich von Persern, Syrern und Usbeken getragen wird. Es besteht ein enger wissenschaftlicher Kontakt mit Indien und China durch die Karawanenzüge, die hin und her reisten und die die indischen Ziffern nach dem Westen brachten.

Unter den damaligen Mathematikern, die in Indien, China und Arabien wirkten, hebe ich nur einen Mann hervor und zwar Al Chorizmi (787-850), der das erste Lehrbuch der Algebra geschrieben hat, der Name Al Chorizmi bedeutet "(Der Sohn

* vgl. B.F.Wyman, Amer. Monthly 79(1972), 571-586

des) Mannes aus Chorizm". Diese Provinz gehört heute zur UdSSR und sie heißt auch heute noch so, und die Stadt, in der er geboren wurde, hieß damals so wie die Provinz. Heute heißt sie Chiva und gehört zu Usbekistan. Zu Ehren Al Chorizmis wurde im September 1983 in Chiva ein großes Fest gefeiert. Ich verdanke diese Information Herrn Prof. Zemanek. Das Lehrbuch hat einen langen Titel, ich hebe nur ein Wort hervor, Algebra, das bedeutet die folgende Umformung: Zu einer Gleichung $a = b$ wird eine Zahl c addiert, die entgegengesetzte Operation kommt ebenfalls im Titel vor. Man vergleiche dazu die Axiome 2 und 3 bei Euklid. Man könnte es "Das Buch über Umformungen" nennen. Ein solches Textbuch war durch die komplizierte islamische Rechtslage bei Erbteilungen erforderlich, besonders, wenn der Verstorbene vier Frauen und zugehörige Kinder hatte, vor allem, wenn die Frauen aus unterschiedlichen Gesellschaftschichten kamen. Als Beispiele führen wir an: die ehrwürdige Gleichung, (deshalb ehrwürdig, weil heute noch Lehrbücher diese Aufgabe behandeln) $x^2 + 10x = 39$; diese Gleichung hat ja zwei Lösungen, es wurde im allgemeinen nur die positive Lösung gerechnet. Eine andere Gleichung: $50 + x^2 = 29 + 10x$. Wird zunächst von beiden Seiten 29 abgezogen, so erhält man $21 + x^2 = 10x$. In einem anderen Buch behandelt er die indisch-arabischen Zahlen. Das Werk fand weite Verbreitung und machte den Namen des Verfassers im Mittelalter sprichwörtlich. Wenn wir heute von Algorithmen sprechen, sollten wir an Al Chorizmi denken, der in seinen Büchern Rechenverfahren entwickelt hat.

Langsam setzen sich auch die negativen Zahlen, die aus Indien kommen, durch, auch bei den linearen Gleichungen. Sie werden als Schulden interpretiert, es findet sich aber auch eine Gleichung $x + 1 = x$. Hier wird als Lösung $\frac{1}{0}$ angegeben, das Wort *unendlich* wird vermieden. Umformen von Gleichungen galt noch lange als Kunst. Es nennt auch Cardano sein Buch über Algebra (1545) - Ars magna.

Mittelalter, Renaissance, Barock, Aufklärung

Wenn wir von der hohen Entwicklung der Mathematik in Asien gesprochen haben, so gilt dies nicht für Europa. Für Spanien, das unter arabischer Herrschaft ist, trifft es zwar auch zu, aber nicht für die übrigen Teile Europas, da die Römer zur Förderung der Mathematik überhaupt nichts beigetragen haben, auch bei der julianischen Kalenderreform mußten sie Gelehrte aus Alexandria holen, ja sogar der Satz, daß die Winkelsumme im Dreieck 180° beträgt, geht verloren. Schon unter Karl dem Großen (724-814) wurde erkannt, daß diese Situation des niedrigen Kulturstandes im Vergleich zu Byzanz und zu den arabischen Ländern nicht weiter aufrecht erhalten werden konnte. Allerdings war das gerettete Kulturgut in den Klöstern Europas zu gering, um eine entscheidende Wende herbeizuführen. Die ersten Versuche wurden vom Berater Karls des Großen - Alkuin (er kam aus York, etwa 730-804) durchgeführt. Er verfaßte eine Aufgabensammlung zur "Schärfung des Geistes" von 56 Aufgaben (53 davon mit Lösungen versehen). eine neue Ausgabe dieser Sammlung wurde von M. Folkerts herausgegeben (Denkschriften der Österreichischen Akademie der Wissenschaften S 15-80 (1978)). Gerbert von Aurillac (940 - 1003) (seit 999 Papst Sylvester II) und später Albertus Magnus (1193 - 1280 n.Chr.)hatten schon die Idee einer Enzyklopädie des Wissens, in der auch die Mathematik einen der Bedeutung des Faches entsprechenden Platz hatte.

Der Neubeginn setzt nach der Eroberung von Toledo in Spanien 1085 ein. Scharen von Übersetzern eilten nach Toledo, um Manuskripte, wie den Almagest von Ptolemäus aus dem Arabischen, (bzw. Hebräischen oder aus der castilischen Sprache) zu übersetzen. Gleichzeitig entwickelt sich ein Neubeginn in Sizilien und es gelingt, auch von Konstantinopel Manuskripte griechischer Mathematiker zu erhalten. Auch die indisch–arabischen Zahlen werden im Abendland bekannt, sie setzen sich nur langsam gegenüber den römischen Zahlen durch, da das Rechnen mit dem Abakus, dem antiken Rechenbrett,rascher erfolgt. Die Algebra und ihre

Symbolik wird durch Leonardo von Pisa (1180 - 1250) in Italien bekannt. Er (auch Fibonacci genannt) ist von Beruf Kaufmann.

In Norditalien entwickeln Kaufleute verschiedene Methoden, um dieses Rechnen im Handel einfacher zu gestalten, denn es liegt im Wesen des Handels, möglichst viele Dinge zu normieren und Abkürzungen zu verwenden. Es entwickeln sich auch in Norditalien die Zeichen für + und –. Die Kaufleute verwenden die Zeichen nicht nur, sondern sie unterrichten auch ihre Lehrlinge in dem Fach des kaufmännischen Rechnens mit diesen neuen Symbolen. Prof. Zemanek nennt diese Periode in der Mathematik die synkopische Ära (Synkope griech. Abhauen). Die arabische Algebra wird weiterentwickelt. Daneben ist aber die Zahlenmystik in hohem Schwung. Man denke nur an die Zahl 13 oder an die böse 7. Dies steht natürlich alles in Zusammenhang mit der Astrologie, die ja schon im alten Babylon eifrig gepflegt wurde. Das hat auch bewirkt, daß die Mathematik lange Zeit als mit dem Teufel im Bunde stehende Wissenschaft angesehen wurde, im Gegensatz zur Zeit Platons, in der die Mathematik als göttliche Wissenschaft galt. Es ist ja bekannt, daß noch Kepler Horoskope erstellt hat. Berühmt ist sein Horoskop für Wallenstein. Er hat auch gesagt, die Einkünfte für die Mathematiker sind so selten und so gering, daß die Mutter – gemeint ist die Mathematik – wohl des Hungers sterben müsse, wenn sie nicht die Tochter, die Astrologie, ernähren würde. Es ist aber andererseits interessant, wie begeistert das Rechnen mit Symbolen, also die Algebra von den Gelehrten aufgenommen wurde. Raimundus Lullus (1234-1315) hat bereits daran gedacht, die Symbolik so auszubauen, daß die Logik einbezogen werden kann und die so entstehende Sprache dazu benützt werden kann, Ungläubige zu bekehren und er hat schon an eine Maschine gedacht, die dies alles verwirklichen kann, also an einen Computer. Diese Idee von Lullus hat noch Leibniz und Gödel beeinflußt.

Eine entscheidende Wendung in der Mathematik tritt durch Nikolaus von Oresme (1323-1382) ein. Man findet bei ihm einen Funktionsbegriff. Er beschäftigt sich mit dem Unendlichen und zeigt die Divergenz der harmonischen Reihe. Die Funktionen werden graphisch in einem Koordinatensystem dargestellt.

Die Mathematiker in Wien schließen sich in diesem Jahrhundert eng an Oresme an, dies gilt auch für die Bürgerschule bei St. Stephan, die ranghöchste Schule in Wien. Sie war neben dem Churhaus (heute ist hier die Filiale einer Bank), nahe dem Stock im Eisen-Platz. Die Schüler konnten das Ewige Licht auf den Friedhof um die Magdalenenkirche sehen. Es gab zwei Kurse: der untere Kurs, wo nur einfachste Rechnungen gelehrt wurden. Dann gab es noch einen Kurs, der für die damalige Zeit etwas höhere Sachen behandelte. Auch nach der Gründung der Wiener Universität 1365 wurde in dieser Tradition fortgefahren und darüber hinaus das Werk von Oresme weitergeführt. Das ergab sich schon daraus, daß die Universität zunächst in der Bürgerschule bei St. Stephan untergebracht war und erst später Hörsäle in der Umgebung der Bäckerstraße bekam.

Im 15. Jahrhundert hebt sich das wissenschaftliche Niveau entschieden. Zunehmend wird Euklid studiert und in den Kommentaren weiterentwickelt. Besonders intensiv wird weiterhin die Trigonometrie betrieben. Ich nenne nur Peuerbach (1423 – 1461) und Regiomontanus (1436 – 1476). Die Algebra, damals Coß (die Sache italienisch war die Unbekannte) genannt, wird weiterentwickelt.

Ich nenne hier nur die Namen Rudolff (1500 – 1545) und Schreiber (Grammateus) (1496 – 1525). Es entwickelt sich ab 1480 langsam der Beruf eines Mathematikers, entweder als Hofmathematiker, als Schulmeister an Schulen oder als Professor an Hochschulen, bzw. als Rechenmeister (Cossist) und Lehrer an Rechenschulen. Der bedeutendste unter ihnen war wohl M. Stifel (1487 – 1567). Diese Cossisten waren stolz darauf, Wurzel ziehen zu können, bis zur 8. Ordnung und darüber hinaus, das zeigte sich auch in folgenden Aufgaben:

Ein Bauer verkauft 5 Säcke Weizen zum Preis von $\sqrt{5} + 3$ Taler, wie groß ist sein Erlös, wenn er statt 5 Säcken $3\sqrt{5}$ Säcke verkauft. Auch heute, im Zeitalter des

Computers würde man solche Aufgaben als merkwürdig und abstrus empfinden, denn auch heute ist es nicht üblich, Preise in Wurzeln anzugeben. (Diese Information verdanke ich Herrn Prof. Kaunzner aus Regensburg, der zu den großen Fachleuten auf dem Gebiete der mittelalterlichen Mathematik gehört. Das obige Beispiel ist nicht historisch, aber analoge Beispiele kommen wirklich vor. Historisch ist folgendes Beispiel: Es kauft jemand um $1+\sqrt{2}$ Gulden $3+\sqrt{2}$ Ellen Stoff (bei Rudolff). Zunehmend wird mit der Feder auf der Linie gerechnet. (Aus dem Wurzelpunkt . wird das Wurzelzeichen $\sqrt{\ }$)

Von den Rechenmeistern ist der bekannteste wohl Adam Ries (1492 – 1559). Angewendet wurde die Mathematik zur Berechnung von Kalendern und in der Feldmeßkunst (auch in der Befestigungslehre).

Den Mathematikern Fontana Tartaglia (1500-1557) und del Ferro (1465-1525) gelingt ein ungeheurer Fortschritt über das Altertum hinaus. Es gelingt ihnen nämlich die Auflösung der Gleichung 3.Grades, die Cardano (1501-1576) in seinem Buch "Ars Magna" veröffentlicht hat, obwohl er Tartaglia geschworen hatte, sie geheim zu halten, und so heißt sie jetzt Cardanische Formel.

Die Idee besteht im folgenden:

Es wird die Formel benützt $(a+b)^3-((a^3+b^3+3ab)(a+b))=0$. Sie wird auf die Formel $x^3-px-q=0$ angewendet, indem gesetzt wird $p=3ab, q=a^3+b^3, x=a+b$ und man erhält sofort die folgende Formel aus: $a^3+b^3=q, a^3b^3=(\frac{p}{3}^3)$ für die drei Nullstellen $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$

$$3\alpha_1=u+v, 3\alpha_2=\zeta^2u+\zeta v, 3\alpha_3=\zeta v+\zeta^2 v$$
$$u=\sqrt[3]{\frac{27}{2}q+\frac{3}{2}\sqrt{-3D}}, v=\sqrt[3]{\frac{27}{2}q-\frac{3}{2}\sqrt{-3D}}$$

$D=4p^3-27q^2, \zeta=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}$

Es ist fraglich, ob die Mathematiker des Altertums diese Formel wirklich so geschätzt hätten, denn Cardano entdeckte die Tatsache, daß, im Falle von drei reellen

Lösungen die Diskriminante D positiv ist, d.h. die Lösungen erscheinen in komplexer Form. (Casus irreducibilis) und komplexe Zahlen gab es ja im Altertum nicht.

Will man also solche Gleichungen lösen, so muß man trigonometrische Ansätze machen. Die Auflösung der Gleichung 4. Grades gelingt erst Ferrari (1522–1565) – einem Schüler Cardanos – der folgenden Ansatz macht: $x^4 + px^2 + qx + r = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$. Man erhält dann vier Gleichungen in a, b, c, d. Eliminiert man diese Gleichungen der Reihe nach, so erhält man z.B.für c eine Gleichung 6. Grades, die man sofort auf eine Gleichung 3. Grades für c^2 reduzieren kann (kubische Resolvente) und die kann man dann mit Hilfe der Cardanischen Formel lösen. Man hat gehofft, noch Euler hat daran geglaubt, diesen Weg fortsetzen zu können und auch Gleichungen 5. Grades auf diesem Weg lösen zu können. Wie allgemein bekannt, ist dies nicht mehr möglich und wir werden noch darauf zu sprechen kommen.

Obwohl die Coß sich sehr entwickelt, entsteht eine ganz neue Richtung, die diese Errungenschaften in den Schatten stellt – vor allem in Westeuropa, zunächst getragen von Stevin (1548 – 1620), der vorschlägt, die Brüche durch Dezimalzahlen zu ersetzen und unendliche Dezimalzahlen einführt und damit implizit der Menge der reellen Zahlen zur Existenz verhilft.

Vieta (1540 – 1603) schafft nun – von den Cossisten erträumt – die mathematische Zeichensprache. Obwohl seine Schreibweise noch schwerfällig ist und bald durch eine viel bessere Symbolik abgelöst wird, ist seine Methode bahnbrechend. Von Beruf ist er Jurist, er ist ein hochangesehener Anwalt der Hugenotten. Selbst Katholik, wird er Ratgeber der französischen Könige, vor allem wegen seiner Kenntnisse der Geheimschriften. Sein Werk auf dem Gebiet der Trigonometrie ist ebenfalls von großer Bedeutung. Er stellt als erster eine Produktdarstellung für die Zahl π auf, und zwar unter der Benützung der Formeln $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$ indem er diese Formel iteriert

$$\sin\alpha = 2^n \sin\frac{\alpha}{2^n}\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\alpha}{2^k}$$

dann mit $n \to \infty$ geht: $\sin\alpha = \alpha\prod_{k=1}^{\infty}\cos(\alpha 2^{-k})$ und $\alpha = \frac{\pi}{2}$ setzt. Dabei benützt er die Rekursionsformel

$$\cos\frac{\alpha}{2^k} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2^{k-1}}} \quad (k = 1,2,3,\cdots)$$

Bekannt ist der Vietasche Wurzelsatz. Sind $\alpha_1\cdots\alpha_n$ die Nullstellen des Polynoms $x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ so bestehen die Relationen $-a_1 = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n, a_2 = \alpha_1.\alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1}.\alpha_n, \cdots, a_n = \pm\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$. Er hat auch eine Abhandlung geschrieben, die den Namen "Zetetica" führt (man würde heute Analysis sagen), in der sich eine Rechnung mit rechtwinkeligen Dreiecken findet. Basis ist die Lagrangesche Identität, die schon aus dem Altertum bekannt war.

$$(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = (a_1a_2 - b_1b_2)^2 + (a_2b_1 + a_1b_2)^2$$

Man kann sie als ein Rechnen mit komplexen Zahlen bezeichnen.

16. und 17. Jahrhundert

Gleichzeitig entwickelt sich das Rechnen mit den Logarithmen. Spuren finden sich schon bei Euklid und Archimedes. Entwickelt wurden sie von Bürgi (1552–1632), der trotz Aufforderung von Kepler (1571 – 1630) zu langsam war, sodaß die Priorität Neper (1550-1617),einem schottischen Landedelmann,zukommt.Logarithmen, die hier berechnet werden, sind die natürlichen Logarithmen zur Basis e. Erst auf Vorschlag von Briggs (1561 – 1631) wird alles auf die Zehnerlogarithmen umgerechnet. Die Ideen, die bei der Erfindung des Logarithmus (Der Name bedeutet Verhältniszahl) entwickelt wurden – es handelt sich um die Lösung der Funktionalgleichung $f(xy) = f(x) + f(y)$ – waren dann von ungeheurer Bedeutung.

Es wird implizit benützt, daß die Ableitung von $\ln x$ gleich $\frac{1}{x}$ ist. Neper deutet dies auch geometrisch-physikalisch. Weiters findet sich sowohl bei Bürgi, wie bei Neper und Kepler die Formel:

$$\ln a = \lim_{n \to \infty} n(\sqrt[n]{a} - 1)$$

Sie benützen sie zur Berechnung der Logarithmen, indem bei ihnen n die Folge der Potenzen von 2 durchläuft: $n = 2^m$.

Gregorius von San Vicentio (1584–1667) deutet diese Formel als den Flächeninhalt unterhalb der Hyperbel $y = \frac{1}{x}$ also als

$$\int_1^x \frac{dt}{t}$$

Die Zahl x, für die dieses Integral 1 ist, wird dann später von Euler mit e bezeichnet, gemeinsam mit $O, 1$ und π sind das die wichtigsten Zahlen der Mathematik. Man nennt diese Zahlen heute gerne die Stars der Mathematik. Gregorius hat auch den Namen Exhaustionsmethode für die Methode des Eudoxus eingeführt.

Kepler war nicht nur Astronom, sondern auch Mathematiker von hohem Grade. Er erkannte nicht nur die Bedeutung der Kegelschnitte, er ist auch Vorläufer auf dem Gebiete der Differential- und Integralrechnung. Besonders wichtig ist für uns sein Buch über die Messung von Fässern *Stereometria Doliorum*, das er in Linz 1615 geschrieben hat. Er sagt selbst in der Einleitung: Bei seiner zweiten Hochzeit (im Herbst 1613) wurde ihm zu billigem Preis Wein in Fässern angeboten und er war sehr erstaunt, wie der Inhalt der Fässer gemessen wurde.

Er hat sich in dieser großen Abhandlung überlegt, wie man das Volumen von Fässern messen könnte, wie man das mit drei einfachen Messungen bestimmen kann, und so entdeckte er die berühmte Faßregel. Er berechnet in seinem Werk die Volumina von Zitronen usw. Er beruft sich auf Archimedes, benützt aber unendlich kleine Größen. Der Herausgeber Guldin (1577 - 1643) bemerkt dazu in einer Fußnote, daß er mehr in Archimedes hineingelesen als herausgelesen hat. Und trotzdem ist Kepler Archimedes hinter die Schliche gekommen, denn seit 1906 wissen wir ja, daß Archimedes auch mit unendlich kleinen Größen gearbeitet hat und erst nachher alles in eine exakte Form gebracht hat. Kepler hat in Prag auch eine sehr schöne Arbeit über Schneekristalle geschrieben. Man kann das als eine Arbeit über die dichteste Lage von konvexen Figuren in der Ebene und im Raum betrachten. Die Lektüre kann nur wärmstens empfohlen werden. Der Titel lautet: "Strena Seu de Nive Sexangula" (Neujahrsgabe(n) oder vom sechseckigen Schnee (1611).

Kepler hat Integrale $\int_0^\alpha sin\vartheta = 1 - cos\alpha$ berechnet. Elliptische Integrale nur numerisch $U(Ellipse) \sim (a+b)\pi$. Volumsberechnungen finden sich ausführlich bei Cavalieri (1598 – 1647) (Schüler von Galilei (1564 – 1647). (In der Schule ist das Cavalierische Prinzip ja bekannt). Er berechnet das Integral $\int_a^b x^l dx$ bis zur neunten Potenz. Cavalieri kennt die Formel

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Es gelingt ihm aber nicht, die allgemeine Formel

$$\int_a^b x^l dx = \frac{b^{l+1} - a^{l+1}}{l+1} \quad (l = 1, 2, 3, \ldots)$$

die er vermutet, zu beweisen.

Dies gelingt Fermat (1601 – 1665), Jurist in Toulouse. Es gelingt ihm, indem er von dem Verfahren abgeht das bis zu diesem Zeitpunkt üblich war, nämlich das Intervall $(a \cdot b)$ in gleich lange Teile zu teilen, er legt eine andere Einteilung zugrunde. Er teilt z.B. das Intervall $\langle 1, a \rangle$ in die Teile

$$\langle a^{\frac{k}{n}}, a^{\frac{k+1}{n}} \rangle, (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

Es wird

$$\int_1^a \frac{dt}{t} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n-1} a^{\frac{-k}{n}} (a^{\frac{k+1}{n}} - a^{\frac{k}{n}}) = \lim_{n \to \infty} n(a^{\frac{1}{n}} - 1)$$

Auch die Vermutung von Cavalieri läßt sich bei dieser Fermatschen Einteilung leicht zeigen. Es gelingt ihm auch, den Fall $k = -1$, also den Logarithmus, hier einzuordnen. Fermat entwickelt unabhängig von Descartes (1596 – 1650) die analytische Geometrie, die jedem Punkt in der Ebene ein Zahlenpaar und jeder Geraden drei Zahlen zuordnet, bei denen es aber auf einen gemeinsamen Faktor nicht ankommt. Fermat dringt bereits in die Differentialrechung erstaunlich weit vor, man denke nur an das Fermatsche Prinzip der Lichtfortpflanzung.

Er schließt direkt an Diophant bei der Lösung von diophantischen Gleichungen an. Bis heute beschäftigt man sich mit der Fermatschen Vermutung. Eine Frucht dieser Bemühungen ist die algebraische Zahlentheorie. Es seien nur folgende Mathematiker genannt, die sich um dieses Gebiet verdient gemacht haben: Gauß, Dirichlet, Kummer, Dedekind, Kronecker, Hilbert, Ph. Furtwängler (1869 – 1940), Takagi, E. Artin, H. Hasse, Olga Taussky (geb. 1906). Es handelt sich um folgendes Problem: Die Gleichung

$$x^n + y^n = z^n$$

ist für $n \geq 3$, von den trivialen Lösungen abgesehen, in ganzen Zahlen nicht lösbar. Man kann sich auf den Fall, daß n eine Primzahl ist, beschränken. Man unterscheidet zwei Fälle:

Wir wissen nach dem Resultat von Faltings, daß diese Gleichung höchstens endlich viele Lösung haben kann und nach Fauvry, daß es unendlich viele Primzahlen gibt, für die der erste Fall nicht lösbar ist. Fermat entwickelt weiter eine Wahrscheinlichkeitsrechnung unabhängig und gemeinsam mit Pascal (1623 – 1662). Aus der Fülle seiner – Pascals – Resultate seien nur erwähnt: Die erste funktionierende Rechenmaschine. (Ob er von der Rechenmaschine von Schickard (1592 - 1635) gewußt hat, muß offen bleiben.) Pascal hat ferner schon das unendlich kleine Dreieck, von dem dann Leibniz bei der Entwicklung der Differentialrechnung ausgeht, das aber erst von seinem Bruder publiziert wurde. Er formuliert als Erster das Gesetz der vollständigen Induktion. Bekannt ist das Pascalsche Dreieck.

Es sollte jetzt noch etwas über Descartes (Cartesius) gesagt werden. Er entdeckte die analytische Geometrie (nach seinen Erzählungen) in einem Militärlager am 10. 12. 1619); publiziert wurde die Theorie erst 1637. Er entwickelt in diesem Zusammenhang wichtige Sätze aus der Algebra. Es ist vielleicht bemerkenswert, daß er nur die Kurven, die durch eine algebraische Gleichung gegeben sind, zu den geometrischen Kurven rechnet, während er die anderen Kurven als kinematisch bezeichnet.

Es entwickelt sich eine Reihenlehre; es seien hier nur die Namen genannt: Mercator (1627-1680), Gregory (1638-1675), weiters nenne ich noch den Namen Huygens (1629-1687).

Als eigentliche Begründer der Integral- und Differentialrechnung sieht man Isaac Newton (1643-1727) und Leibniz (1646 – 1717) an. Durchgesetzt hat sich nur der Kalkül von Leibniz. Erste Lehrbücher stammen von Marquis de l'Hospital (1661-1704) Gaetani Agnesi (1718 - 1799) und Emilie, Marquise Chatelet (1706-1749) Freundin von Voltaire. Das Buch von de l'Hospital führt den Titel: " Analysis des unendlich Kleinen" und ist 1696 erschienen.

Euler, Weiterentwicklung der Analysis

Der Kalkül von Leibniz wird weiter ausgebaut durch die Bernoullis (Johann I (1667 - 1798), Jacob I (1655 - 1705), Nikolaus I und Johannes II, Daniel (1700 - 1782)), und vor allem durch den größten Meister des Kalküls, Leonhard Euler (1707-1783). Es ist hier natürlich ganz unmöglich, das Werk von Euler nur annähernd zu besprechen.*. Jedenfalls aber, das kann gesagt werden, hat er den Kalkül so handlich ausgebaut, daß er auf alle Teile der Mechanik und der Physik, um nur diese Gebiete anzuführen, anwendbar wurde. Von ungeheurem Einfluß waren auch seine Lehrbücher, die noch bis heute in den Lehrplänen unserer Schulen nachwirken. Die Einführung der Symbole π in der Formel für den Kreisumfang, e für die Basis des natürlichen Logarithmus sind nur die einfachsten Beispiele dieser Art. In der Schule lernen wir den Eulerschen Polyedersatz (er findet sich auch bei Descartes) $e - f + k = 2$, wo e die Anzahl der Ecken, f die Anzahl der Flächen und k die Anzahl der Kanten ist. Das Polyeder darf nicht ganz beliebig sein, es genügt, daß es konvex ist. Man kann die Formel aus dem Analogon in der Ebene $e - f + k = 1$ sofort herleiten, indem man eine Seitenfläche des Polyeders entfernt und den Rest in der Ebene ausbreitet. In der Ebene ist $e - f + k = 1$ für ein Dreieck selbstverständlich und dann führt man vollständige Induktion nach der Anzahl der Dreiecke, aus denen das Polygon besteht, von dem man voraussetzen muß, daß der Rand aus einem Stück besteht, durch. Was den Kalkül selbst betrifft, so hat er die Differentiale als Nullen angesehen, bei denen nur die Quotienten eine Bedeutung haben. Es ist bekannt, daß er bei der Verwendung des Kalküls ohne Bedenken vorging, nach dem Motto D'Alemberts " *Nur voraus! Das Verständnis kommt mit dem Erfolg!*" Euler selbst soll gesagt haben: *Die Feder ist gescheiter als der Kopf des Menschen.* So hat er in der Formel für die unendliche geometrische

---

* Fellmann (Basel) betreut jetzt die Herausgabe der Gesammelten Werke von Euler in mustergültiger Weise.

Reihe für den Quotienten q ohne weiteres -1 gesetzt und so der unendlichen Reihe $+1-1\cdots$ den Wert $\frac{1}{2}$ zugeordnet und z.B. für $q=-3$ $1-3+9-27+\cdots$ die Summe $\frac{1}{4}$ zugeordnet.

Eine Potenzreihe war für ihn ein Polynom unendlich hoher Ordnung. Um ein Beispiel zu geben, argumentiert er folgendermaßen: $\sin x$ hat die Nullstellen $0 \pm \pi n$ $(n=1,2,3,\ldots)$ also $\sin x = ax\prod_{n=1}^{\infty}(x^2-n^2\pi^2)$. Nun ist andererseits $\sin x = x-\frac{x^3}{6}+\cdots$ also folgt durch Koeffizientenvergleich $a\prod_{n=1}^{\infty}(-n^2\pi^2)=1$. Es wird also $\sin x = x\prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2})$. Für $x=\frac{\pi}{2}$ erhält Euler das Wallissche Produkt. Durch Anwendung des Vietaschen Wurzelsatzes erhält er $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$. Damit hatte er den Wert einer Reihe bestimmt, um die sich auch Leibniz sein ganzes Leben lang bemüht hatte.

Analog bestimmt er den Wert der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$. Allerdings ist es bis heute nicht gelungen, den Wert der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ zu bestimmen. Man weiß erst seit einigen Jahren durch Apéry, daß der Wert dieser Reihe irrational ist. Es wäre schön, noch ein weiteres Beispiel zu geben, wie Euler geschickt mit divergenten Reihen operiert und trotzdem, von einem genialen Instinkt geleitet, richtige Resultate erzielt. Es haben andere Mathematiker versucht, ihm dies mit mehr oder weniger Erfolg nachzumachen.

Seine Arbeiten mit unendlich kleinen Größen haben sich noch lange an den Hochschulen, insbesondere an den Technischen Hochschulen und an den Gymnasien gehalten. Die Physiker denken heute noch so, geleitet durch ihr physikalisches Gefühl. Es erwies sich aber dann doch als notwendig, den Kalkül auf strengere Grundlagen zu stellen, da ja nicht jeder Mathematiker das sichere Gefühl Eulers hat. Wir wollen zunächst einmal einige Namen nennen, Gauß (1770–1855) der das Konvergenzverhalten der hypergeometrischen Reihe untersucht, Abel (1802–1829) der die Binomialreihe untersucht und vor allem Cauchy (1789 – 1857) der in Vorlesungen an der Ecole polytechnique Grundlagen für eine strenge Behandlung des

Kalküls schafft, obwohl Cauchy selbst noch zu dem Hilfsmittel der unendlich kleinen Größen greift und auch Irrtümer begeht.

Ihren Höhepunkt erreicht diese strenge Behandlung des Kalküls in den Vorlesungen von Weierstraß (1815-1897) an der Universität in Berlin. Durch die Erfindung des Grenzwertes von Folgen wird gleichzeitig erreicht,

1) die Definition der Konvergenz von Reihe *

2) die Definition des Grenzwertes von Funktionen, insbesondere der Ableitung einer Funktion

3) die Definition der Stetigkeit einer Funktion.

4) Die Definition des bestimmten Integrals.

Damit war der Kalkül von Leibniz streng begründet ohne Benützung unendlich kleiner Größen und auch interpretiert. Dazu kommt durch Weierstraß der Begriff der gleichmäßigen Konvergenz von Funktionenreihen und der Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit. Weierstraß zeigt durch Gegenbeispiele den Unterschied auf für Funktionen, die nach unten beschränkt sind, zwischen der unteren Grenze und dem Minimum. Dies wird ganz eklatant durch Weierstraß gezeigt in der Widerlegung des Dirichletschen Prinzips in der Funktionalanalysis und in der Variationsrechnung. Es sei $I(f) = \int_{-1}^{1}(xf'(x))^2dx$. Gesucht wird ein f mit $f(1) = 1$ und $f(-1) = 0$, so daß $I(f)$ Min. Ist $\varepsilon > 0$, dann ist für

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{arctg\frac{x}{\varepsilon}}{arctg\frac{1}{\varepsilon}}\right)$$

aber $I(f) \leq \frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{arctg\frac{1}{\varepsilon}}$. Es gibt also kein Minimum.

---

* $\sum a_k$ ist konvergent zur Summe s, wenn für die Partialsummen $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ gilt $lim_{n\to\infty} s_n = s$. Man erhält nach G. Frobenius für die divergente Reihe von Leibniz und Euler $1 - 1 + 1 - 1 + - \cdots$ $\lim_{n\to\infty} \frac{s_1+\cdots+s_n}{n} = \frac{1}{2}$, also eine Rechtfertigung des Eulerschen Wertes $\frac{1}{2}$. Man nennt solche Verfahren wie bei Frobenius 'Summierungsverfahren'.

Er zeigt, daß es stetige, aber nicht differenzierbare Funktionen gibt und zwar an dem Beispiel ($0 < b < 1$, a ungerade natürliche Zahl)

$$\sum_{n=1}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$$

(Riemann hatte eine andere Funktion mit solchen Eigenschaften vorgeschlagen, und zwar

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}$$

Allerdings wurde vor einigen Jahren gezeigt, daß diese Funktion an gewissen Stellen differenzierbar ist, und man weiß bis heute nicht, an welchen Stellen diese Funktionen differenzierbar sind und an welchen nicht.)

In diesem Zusammenhang sei erwähnt, daß Bolzano (1781–1848) in Prag ebenfalls eine solche Funktion aufgestellt hat. Dies wurde in den 20er Jahren von Hans Hahn (1879 – 1934) und Rychlik erkannt. Bolzano und Weierstraß waren die ersten, die Beweise für die folgenden Eigenschaften von stetigen Funktionen im abgeschlossenen Intervall geführt haben:

1) den Zwischenwertsatz, 2) den Satz vom Maximum und Minimum, 3) den Satz von der gleichmäßigen Stetigkeit, und 4)den Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

Diese Sätze waren für die Anwendung des Kalküls notwendig. Sie sind aber reine Existenzsätze, die Beweise sind nicht konstruktiv, da sie indirekt geführt werden und das Auswahlprinzip benutzen. Der erste Existenzsatz dieser Art wurde von Gauß für den Fundamentalsatz der Algebra geführt. Existenzbeweise haben eine gewisse Analogie zu ontologischen Gottesbeweisen der Scholastik Es ist vielleicht nicht überraschend, daß der späte Gödel, wie man kürzlich in seinem Nachlaß entdeckt hat, in Nachfolge von Leibniz einen Gottesbeweis versucht hat.

Cauchy hatte ein Kriterium, das bekannte Cauchysche Kriterium für die Konvergenz von Folgen aufgestellt, aber nicht bewiesen. Nachdem jetzt die Grundlagen des Kalküls in der Richtung geführt waren, daß die unendlich kleinen Größen entfernt werden konnten, stellte sich jetzt die Aufgabe, dieses Cauchysche Kriterium auf eine sichere Grundlage zu stellen. Dies hatten schon Weierstraß und Bolzano versucht, aber der volle Erfolg stellte sich erst durch eine Begründung der reellen Zahlen durch Cantor (1845-1915) und Dedekind (1831-1916) ein. Sie werden definiert entweder als Klassen Cauchyscher Folgen von rationalen Zahlen, wobei alle Folgen, welche sich nur durch Nullfolgen unterscheiden, in die gleiche Klasse kommen, oder als Schnitt in der Menge der rationalen Zahlen (eine Variante, die jetzt in der Schule tradiert wird, ist die Intervallschachtelung). Jetzt erweist es sich als notwendig, die rationalen Zahlen zu begründen. Dies war verhältnismäßig leicht, sie konnten auf die natürlichen Zahlen zurückgeführt werden. Jetzt stellte sich die Aufgabe, die natürlichen Zahlen exakt zu begründen, aber das wollen wir erst später besprechen.

Nachdem der Bann gebrochen war, war es geradezu eine Leidenschaft der Mathematiker, Gegenbeispiele zu althergebrachten Anschauungen zu finden. * So Cauchy mit seiner Funktion, $e^{-\frac{1}{x^2}}$ für $x \neq 0$ und 0 für $x = 0$, deren Taylorreihe konvergent ist (alle Glieder sind 0), die aber von der Funktion verschieden ist. Das berühmteste Gegenbeispiel ist die Kurve in Parameterdarstellung $x = \phi_1(t), y = \phi_2(t)$, wobei ϕ_1 und ϕ_2 stetig sind, und die durch jeden Punkt des Einheitsquadrats hindurchgeht. Sie stammt von Peano (1858 – 1932). Wir geben ein Beispiel von Schönberg.

Es sei $p(x) = 1$ für $|x-1| < \frac{1}{3}, p(x) = 2 - 3(1-x)$ für $\frac{1}{3} < |x-1| < \frac{2}{3}, p(x) = 0$ für $|x-1| > \frac{2}{3}$. Sie werde über das Intervall $(0,2)$ periodisch mit der Periode 2 fortgesetzt; dann ist

$$\varphi_1(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} p(3^{2n-2}t),$$

---

* Diese Entwicklung wurde oft als 'ungesund' empfunden (Poincaré, Hadamard, E. Borel, Lebesgue, H.Weyl (1885 – 1955)).

$$\varphi_2(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} p(3^{2n-1}t)$$

Es sei nun (x, y) ein Punkt mit $0 =\leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, also

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k}, y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{2^k}$$

(a_k, b_k gleich 0 oder 1), so nehmen wir

$$t_o = \frac{2a_1}{3} + \frac{2b_1}{3^2} + \frac{2a_2}{3^3} + \frac{2b_2}{3^4} \ldots$$

Es ist $p(3^{2n-2}t_o) = a_n, p(3^{2n-1}t_o) = b_n$ also $\varphi_1(t_o) = x, \varphi_2(t_o) = y$

Im positiven Sinne fand Jordan (1838 – 1922) einen Beweis, daß jede geschlossene Jordankurve die Ebene in zwei Teile teilt, nämlich in ein Inneres und ein Äußeres. Vor einigen Jahren hat man in der Nationalbibliothek in Wien, wo der Nachlaß von Bolzano aufbewahrt ist, entdeckt, daß sich schon Bolzano über diesen Satz Gedanken gemacht hat. Eine Beweisskizze geht so: Als Punkte im Inneren werden Punkte definiert, die die Eigenschaft haben, daß jeder Halbstrahl, der von ihnen ausgeht, die Kurve in einer ungeraden Anzahl von Schnittpunkten schneidet. Bei äußeren Punkten ist die Anzahl dieser Schnittpunkte gerade. Man zeigt, daß die Menge der inneren Punkte, so wie die Menge der äußeren Punkte bogenweise zusammenhängend ist und daß jeder Polygonzug, der einen inneren mit einem äußeren Punkt verbindet, mindestens einen Punkt der Kurve trifft. Zum Funktionsbegriff sei bemerkt, daß er sich zunächst (Euler und Lagrange (1736 – 1813)) auf Funktionen beschränkt, die sich in Potenzreihen entwickeln lassen. Die Fourierreihen zwingen nun dazu, den Funktionsbegriff zu erweitern, bis dann Dirichlet (1805 – 1859) die Funktion allgemein als Zuordnung erklärt. Nun muß man natürlich definieren, wann eine Funktion integrierbar ist. Zunächst sind nur die stückweise stetigen Funktionen integrierbar (Cauchy), eine erste Erweiterung wird durch Riemann vorgenommen und einen gewissen Abschluß bildet der Lebesguessche Integralbegriff. (Lebesgue 1875 – 1941).

Analysis

Schon unter Euler klärt sich der Begriff des Logarithmus der komplexen Zahlen mit Hilfe der Eulerschen Formel. Die komplexe Funktionentheorie wird unter Cauchy zu einem eigenen Gebiet. Er zeigt die höchst merkwürdige Tatsache, daß jede komplexe differenzierbare Funktion alle Ableitungen besitzt und sich in eine Potenzreihe entwickeln läßt. Dies zeigt man mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes, also mit Hilfe der Integralrechnung. Bis heute kennt man keinen anderen Zahlbereich, wo diese Tatsache zutrifft, auch bei den Quaternionen ist dies nicht der Fall. Man nennt daher dieses Gebiet, das früher Funktionentheorie genannt wurde, jetzt mit Recht "Komplexe Analysis". (In Österreich waren W. Wirtinger (1865 - 1945) und H. Hornich (1906 - 1979) die bedeutendsten Vertreter dieses Gebietes.) Es gibt auch keinen Beweis ohne Integralrechnung oder verwandter Hilfsmittel. Als Grund dafür hat Hilbert in seinen Vorlesungen die Gültigkeit des Fundamentalsatzes der Algebra angegeben.

Obwohl der Dirichletsche Funktionsbegriff so allgemein ist, gestattet er nicht die Konstruktion einer Funktion, die nur an der Stelle 0 von 0 verschieden ist und deren Integral gleich 1 ist (Dirac-Funktion). Dies gelang Laurent Schwartz 1944 durch Einführung der Distributionen. Es wird ein Kunstgriff benützt, der in der Mathematik üblich ist, z.B. bei der Einführung der reellen Zahlen, nämlich die Einführung eines Äquivalenzbegriffs.

2 Folgen von Funktionen f_n und g_n, auf der ganzen Zahlengeraden integrierbar, heißen äquivalent, wenn für alle integrierbaren Funktionen F gilt

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_n F dx = \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g_n F dx$$

Diese Äquivalenzklasse heißt Distribution und die Dirac- Funktion ist die Klasse

$$[e^{-nx^2}\sqrt{\frac{n}{\pi}}].$$

Vorher wurde bemerkt, daß die Erfindung des Grenzbegriffs von Folgen dazu diente, verschiedene Dinge unter einen Hut zu bringen. Im 20. Jahrhundert geben die Definitionen dieser Begriffe wieder auseinander, der Träger der Stetigkeit wird der topologische Raum X, begründet durch F. Hausdorff (1868-1942), Frechet(1878-1973), H. Tietze (1880 - 1964), L. Vietoris (geb. 1891), u.a. der Träger des Inhalts, bzw. Maßes wird der Maßraum $M.X$ selbst geht aus dem Begriff des metrischen Raumes hervor indem ein Abstand definiert ist. Dies alles führt zur Theorie der linearen Funktionale $I(f+g) = I(f) + I(g), I(cf) = cI(f)$ (das Integral ist ja der Prototyp eines linearen Funktionals!). Diese Entwicklung ist mit den folgenden Namen verknüpft: Hadamard (1865-1963), Frechet, F. Riesz (1878 - 1953), Radon (1887-1957), Helly (1884 - 1943), H. Hahn, S. Banach (1892-1945). (Die Basis für alle diese Entwicklungen war die Mengenlehre von Cantor.)

Algebra

Fragen wir uns nun, was davon in die Schule eingedrungen ist? Zunächst die Differential- und Integralrechnung 1907 durch F.Klein (1849-1925), (Versuche, sie wieder aus der Schule zu entfernen, sind gescheitert); der Limesbegriff; die Intervallschachtelung; die Mengenlehre (schon in der Volksschule); die Wahrscheinlichkeitsrechnung über das Radonsche Maß; der Begriff des Vektorraums und andere algebraische Begriffe.

In den letzten Jahrzehnten hat durch die Non-Standard Analysis eine neue Entwicklung eingesetzt, in der man ungestraft, à la Leibniz, mit unendlich kleinen Größen operieren kann. Ich nenne dazu nur einige Namen: Laugwitz, Schmieden, Robinson, Luxemburg. Gödel (1906 - 1978) hat immer dafür plädiert. Als unendlich kleine Größe a kann man die Klasse aller Nullfolgen nehmen, die sich voneinander nur um endlich viele Elemente unterscheiden. Es ist also möglich den Kalkül von Leibniz mit Hilfe von unendlich kleinen Größen exakt zu begründen!

Kurz gesagt: *Die Interpretationen des Kalküls wechseln, die Symbole bleiben.* genauso wie in der Physik.

Dies führt uns zwanglos dazu, einen Blick auf die Algebra (das symbolische Rechnen) zu werfen.

Wir haben schon früher die Vietaschen Wurzelsätze erwähnt. Es sind dies Relationen zwischen den Nullstellen der Gleichung (wir nehmen an über Q), die gegenüber Vertauschung invariant sind. E. Galois (1811 - 1832) betrachtet nun alle Relationen, die zwischen den Nullstellen bestehen können, sagen wir über Q, und fragt nun nach allen Permutationen, die diese Relationen wieder in richtige Relationen überführen. Er zeigt nun, daß die Menge dieser Permutationen, modern gesprochen, eine Gruppe bildet, die Galoissche Gruppe. Es ist ganz selbstverständlich, daß die Anzahl der Relationen bei jeder Körpererweiterung zunimmt, die Galoissche Gruppe also kleiner wird. Die Gleichung ist gelöst, wenn G nur aus der Identität besteht. Natürlich haben wir stillschweigend die selbstverständliche Voraussetzung gemacht, daß alle Wurzeln der Gleichung verschieden sind.

Abel hatte schon vorher in seiner berühmten Arbeit: Abhandlung über eine besondere Klasse algebraisch auflösbarer Gleichungen (Crelle Journal 4, 1829) gezeigt, daß die Gleichung durch Wurzeln lösbar ist, wenn die Gruppe kommutativ, also abelsch, ist:

"Wenn die Wurzeln einer Gleichung beliebigen Grades untereinander derart verbunden sind, dass sich diese sämtlichen Wurzeln rational mittels einer von ihnen, die wir mit x bezeichnen, ausdrücken lassen; wenn man ferner, falls durch $\vartheta x, \vartheta_1 x$ zwei beliebige andere Wurzeln bezeichnet werden,

$$\vartheta\vartheta_1 x = \vartheta_1\vartheta x$$

hat, so ist die betreffende Gleichung immer algebraisch auflösbar."

1976 zeigte Shafarevich, daß jede abelsche Gruppe Galoisgruppe sein kann (Umkehrproblem der Galoisschen Theorie).

Sprechen wir nun etwas über die transzendente Auflösung von algebraischen Gleichungen. Abel hat vermutet und L. Kronecker (1823 - 1894) und Weber haben bewiesen, daß jede abelsche Zahl (die also einer abelschen Gleichung genügt) in der Form $q(\zeta)$ darstellbar ist, wo ζ eine Einheitswurzel ist, also $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{m}}$ gilt.

Nehmen wir die Kreisgleichung $\frac{x^p-1}{x-1} = 1$, p Primzahl (Schreibweise von Abel). Sie hat, wie bekannt, die Lösungen $e^{\frac{2\pi i k}{p}}$ $(k = 1, \ldots, p-1)$. Sie sind Werte der einfach periodischen Funktion $e^{2\pi i x}$ an der Stelle k/p. Nehmen wir jetzt eine doppelt-periodische Funktion, z.B. die $\wp$-Funktion, an den Stellen

$$\frac{k_1\omega_1 + k_2\omega_2}{p} \quad (k_1 \equiv 0, \ldots, p-1; k_2 \equiv 0, \ldots, p-1), \quad aber (k_1, k_2) \not\equiv (0,0)$$

(ω_1, ω_2 die Perioden von $\wp$). Die zugehörige algebraische Gleichung ist vom Grad $p^2 - 1$ (Teilungsgleichung) und ihre Galoissche Gruppe ist von der Ordnung

$$\frac{p(p-1)(p+1)}{2}$$

also für $p = 5$ von der Ordnung 60, isomorph zur A_5. Diese Teilungsgleichung kann man reduzieren auf eine Gleichung 6. Grades mit den Wurzeln $v_1, \ldots, v_6$ und, bei passender Anordnung genügt $(v_1 - v_2)(v_3 - v_4)(v_5 - v_6)$ einer Gleichung 5. Grades. Jede allgemeine Gleichung 5. Grades kann auf diese Form gebracht werden (Hermite (1822-1901), Kronecker).

Im Fall $p = 7$ ist diese Gruppe von der Ordnung 168, also verschieden von A_7. F. Klein hat diese Gleichung genau untersucht. Erst vor einigen Jahren ist es mit Hilfe des Computers gelungen, eine numerische Gleichung dieser Form anzugeben $x^7 - 7x + 3 = 0$. Um diese Gleichung zu finden, mußten mehr als 10.000 Polynome untersucht werden. * 1965 entdeckte man mit Hilfe des Computers das Polynom $x^3 - 8x - 10 = 0$. Ist r seine reelle Nullstelle, so gilt für $r+2$ die Gleichung $r + 2 = f(i\sqrt{163})$, wobei $f(r) = q^{-\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty}(1 + q^{2n-1})$ und

* vgl. W. Jehne, "Die Entwicklung des Umkehrproblems der Galoischen Theorie "Mathematische Semesterberichte (1977)

$q = e^{\pi i \tau}$ ist. Es gilt $r + 2 = s^{\frac{1}{24}} + t$, wobei $t < 10^{-17}$ ist und $s = e^{\pi\sqrt{163}} =$ $262537412640768743,99999999999925 0\ldots$

Den Fall $p = 11$ hat man ebenfalls untersucht. Mehr weiß man bis heute nicht, außer bei der Gleichung 27. Grades der 27 Geraden auf kubischen Flächen (und der Gleichung der Wendepunkte von Kurven 3. Ordnung).

Gehen wir noch kurz ein auf die Konstruktionen mit Zirkel und Lineal. Hier hat E. Landau (1877 - 1938) einfache Unmöglichkeitsmethoden entwickelt. Haben wir eine Gleichung 3. Grades $x^3 + px + q = 0$, z.B. $x^3 - 3x + 1 = 0$ (3-Teilung des Winkels 120°) ohne rationale Lösung. Nehmen wir an $x_1 = a + b\sqrt{D}$, $\sqrt{D} \notin Q$ ist Lösung, dann ist auch $x_2 = a - b\sqrt{D}$ Lösung. Nach Vieta ist $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, also $x_3 = -2a$ eine rationale Lösung, was ja nicht sein soll. Nehmen wir an, a, b und D wären aus einem quadratischen Körper, z.B. $Q(\sqrt{D_1})$, $\sqrt{D} \notin Q(\sqrt{D_1}$ so folgt genauso, daß $\sqrt{D} \in Q(\sqrt{D_1})$, wieder ein Widerspruch, usw.

Geometrie, Axiomatik

Wenden wir uns jetzt der Geometrie zu: Die euklidische Geometrie ist beherrscht von Bewegungen, den Drehungen und Verschiebungen, die aber bei Euklid aus der Darstellung verbannt sind. Im 19. Jahrhundert hat sich zur euklidischen die Nicht-Euklidische Geometrie, entwickelt von Gauß, Bolyai (1802 - 1860) und Lobatschewski (1792 - 1856) * gesellt, durch Riemann (1826 - 1868) die elliptische, dann die Kreis- und Kugelgeometrie, entwickelt von Laguerre, Möbius(1790-1868) und S.Lie (1842 - 1899), alles überschattet durch die ungeheure Entwicklung der projektiven Geometrie, sodaß das Wort von Cayley (1821-1895) berechtigt war

Alles ist projektive Geometrie!

Dazu kam die rasante Entwicklung der Differentialgeometrie durch Euler, Gauß und Riemann. Es erhob sich die Frage: Was ist nun Geometrie? F.Klein hat in seiner Antrittsrede als Professor 1872 im sogenannten *Erlanger Programm* dies folgendermaßen beantwortet:

Gegeben ist eine Mannigfaltigkeit (Klein beschränkt sich auf 2 und 3 Dimensionen), auf ihr eine Transformationsgruppe G und jede Invariante gegenüber dieser Gruppe ist eine geometrische Eigenschaft. Die ebene euklidische Geometrie ist eine 2-dimensionale Zahlenmenge, die Ebene. Auf ihr wirkt die Gruppe der Drehungen und Verschiebungen. Invariante Eigenschaften sind Abstand und Winkel. Rechnerisch lassen sich alle orthogonalen Invarianten von 2 Punkten $x = (x_1, x_2)$ und $y = (y_1, y_2)$ bei Einführung eines kartesischen Koordinatensystems darstellen als $\langle x, x\rangle$, $\langle x, y\rangle$ und $\langle y, y\rangle$. ($\langle x, x\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$). Es stellt sich die Aufgabe, wie hier an diesem Beispiel, bei gegebener Gruppe alle Invarianten, bzw. eine Basis für die Invarianten, aufzustellen. Dies kann algebraisch geschehen (ich nenne nur

* durch F.Klein 1871 (Math.Ann.Bd.4) war ein relativer Widerspruchsfreiheitsbeweis gegeben worden (Modell von Klein; ein anderes Modell hat Poincaré (1854 - 1912) gegeben),

die Namen Gordan, Mertens und Hilbert) oder, wie dies Lie getan hat, z.B. bei der Drehgruppe, daß nur unendlich kleine Drehungen betrachtet werden. Für die gesuchten Invarianten erhält man dann lineare Differentialgleichungssysteme, und man kann die Methoden der Analysis anwenden. Diese kontinuierlichen Gruppen (wie man sie früher genannt hat, heute nennt man sie Lie-Gruppen) sind ein hochaktuelles Gebiet.

Was ist eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit M? Dieses Wort, von Riemann in seinem Habilitationsvortrag: *Über die Hypothesen, die der Geometrie zugrunde liegen* (1854) eingeführt, bedeutet, grob gesprochen, folgendes: es liegt ein Umgebungsraum vor (bei Riemann und Klein Zahlenmengen), wobei es zu jedem Punkt eine Umgebung gibt, die sich umkehrbar eindeutig auf eine Kugel im n-dimensionalen euklidischen Raum abbilden läßt. Dadurch kann jeder Punkt in dieser Umgebung durch Koordinaten $(x_1, \ldots, x_n)$ beschrieben werden. Gehört ein Punkt 2 Umgebungen an, so hängen die verschiedenen Koordinaten durch eine differenzierbare Koordinatentransformation mit nicht verschwindender Funktionaldeterminante zusammen. Besitzt die Mannigfaltigkeit eine Transformationsgruppe G, so sind die Koordinatensysteme ausgezeichnet, die auseinander durch Transformationen aus G hervorgehen. Bei Drehungen sind es die kartesischen Koordinatensysteme. Das bedeutet für die Differentiale an diesen Stellen eine lineare Abbildung im Vektorraums der Differentiale. (Zu all dem gehört dann die Tensorrechnung). Heute nennt man solche Mannigfaltigkeiten differentierbar, man spricht von Karten, Atlas, usw.

Mit Riemann kann man eine Metrik auf M einführen, indem man für den Abstand von 2 benachbarten Punkten $x, x + dx$ definiert

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{i,j}(x) dx_i dx_j$$

d.h. man verlangt den *Satz von Pythagoras* im unendlich Kleinen. (Eine Finslersche Geometrie liegt vor, wenn eine allgemeinere Form $ds = f(x, dx)$ zugrunde gelegt wird; ich nenne nur die Namen: Hilbert, Hamel, Berwald und Funk).

Führt man passende (Normal)Koordinaten ein, so hat Riemann gezeigt, daß sich in jedem Punkt P_0 der Mannigfaltigkeit das ds in der Form schreiben läßt

$$ds^2 = \sum_l dx_l^2 + \frac{1}{3}\sum_{i,j,k,l} R_{i.j.k.l}x_ix_jdx_kdx_l + \cdots$$

Diese R sind die Komponenten des bekannten Riemann-Christoffel-Tensors, der die Krümmungsverhältnisse (also die Abweichung vom euklidischen) im Punkt $P-0$ beschreibt und die in der Relativitätstheorie eine fundamentale Rolle spielen.

In letzter Zeit war man bemüht, sich von den Differenzierbarkeits- voraussetzungen freizumachen. Der erste, der dies versuchte, war Hilbert, der aber zunächst den axiomatischen Weg eingeschlagen hat.

1899 erschien anläßlich der Einweihung des Gauß-Weber-Denkmals in Göttingen das Buch "Grundlagen der Geometrie" von Hilbert (1862-1943). Diese Schrift hat das Motto: *So fängt denn alle menschliche Erkenntnis mit Anschauungen an, geht von da zu Begriffen und endigt mit Ideen.* (Kant, Kritik der reinen Vernunft, Elementarlehre T.s.Abs.2). Dann folgt zum Unterschied von Euklid eine kurze Einleitung:

Die Geometrie bedarf – ebenso wie die Arithmetik – zu ihrem folgerichtigen Aufbau nur weniger und einfacher Grundsätze. Diese Grundsätze heißen AXIOME der Geometrie. Die Aufstellung der Axiome der Geometrie und die Erforschung ihres Zusammenhanges ist eine Aufgabe, die seit *Euklid* in zahlreichen vortrefflichen Abhandlungen der mathematischen Literatur sich erörtert findet. Die bezeichnete Aufgabe läuft auf die logische Analyse unserer räumlichen Anschauung hinaus. Die vorliegende Untersuchung ist ein neuer Versuch, für die Geometrie ein *vollständiges* und *möglichst einfaches* System von Axiomen aufzustellen und aus denselben die wichtigsten geometrischen Sätze in der Weise abzuleiten, daß dabei die Bedeutung der verschiedenen Axiomgruppen und der Tragweite der aus den einzelnen Axiomen zu ziehenden Folgerungen klar zutage tritt.

Dann folgt im 1. Kapitel die Erklärung:

Wir denken drei verschiedene Systeme von Dingen: die Dinge des *ersten* Systems nennen wir *Punkte* und bezeichnen sie mit $A, B, C, \cdots$ die Dinge des *zweiten* Systems nennen wir *Geraden* und bezeichnen sie mit $a, b, c, \cdots$ die Dinge des *dritten* Systems nennen wir *Ebenen* und bezeichnen sie mit $\alpha, \beta, \gamma \cdots$. Die Punkte heißen auch die *Elemente der linearen Geometrie* und die Punkte, Geraden und Ebenen heißen *Elemente der räumlichen Geometrie* oder *des Raumes*. Wir denken die Punkte, Geraden, Ebenen in gewissen gegenseitigen Beziehungen und bezeichnen diese Beziehungen durch Worte wie *liegen*, *zwischen*, *kongruent*. Die genaue und für mathematische Zwecke vollständige Beschreibung dieser Beziehungen erfolgt durch die *Axiome der Geometrie*.

Es werden also diese Dinge, Punkte, Gerade und Ebenen durch die Axiome *implizit* definiert. Damit wird ein Trennungsschnitt zwischen der Anschauung und der Geometrie als mathematische Wissenschaft gezogen. Die meisten Mathematiker waren von diesem Schritt begeistert, da nun unter diesen Begriffen etwas Beliebiges verstanden werden konnte, wenn es nur die Axiome erfüllt. Hilbert sagte, es könnten genausogut Bierseidel, Tische und Stühle sein.

Ein entschiedener Gegner dieser Anschauung war der Logiker G. Frege (1848 - 1925). Er parodierte Hilbert mit folgendem Axiomssystem: Wir denken uns Gegenstände, die wir Götter nennen. A1: Jeder Gott ist allmächtig. A2: Es gibt wenigstens einen Gott. Damit hatte er, wie H. Freudenthal in seiner Besprechung der 8. Auflage des Hilbertschen Werkes (in Nieuw Archief vor Wiskunde 4, V,105–142(1957)) sagt, *den Nagel auf den Kopf getroffen*.

Einstein (1879-1955) zog 1920 einen anderen Schluß: *Insofern sich die Sätze der Mathematik auf die Wirklichkeit beziehen, sind sie nicht sicher und inwiefern sie sicher sind, beziehen sie sich nicht auf die Wirklichkeit.*

Das von Hilbert entwickelte System, das sich auf die Arbeiten von M. Pasch*, (den

* (1843 - 1930)

Österreicher) O. Stolz, F. Schur, Veronese, Padua und Peano stützt, enthält fünf Axiomgruppen

I Axiome der Verknüpfung, II Axiome der Anordnung, III Axiome der Kongruenz, IV Axiom der Parallelen, V Axiome der Stetigkeit.

(ad. V. hier ist 1. das Archimedische Axiom und 2. das Axiom der Intervallschachtelung, bei Hilbert Vollständigkeitsaxiom genannt).

z.B.: *I.1 Zu zwei Punkten A,B gibt es stets eine Gerade a, die mit jedem der beiden Punkte A,B zusammengehört.* Dazu gibt Hilbert einen Kommentar: *statt zusammengehören, werden wir auch noch andere Wendungen gebrauchen. z.B.: a geht durch A und B, a verbindet A mit B, A liegt auf a, A ist ein Punkt von a.* Man merkt, wie Arnold Schmidt, ein Mitarbeiter von Hilbert sagt, zwei Tendenzen, erstens, die Axiome werden anscheinend willkürlich*) aufgestellt; und zweitens die Tendenz, die Formulierung möglichst einfach zu wählen. Hilbert vermeidet in seinen Grundlagen, so wie Euklid, den Begriff der Bewegung. Man kann die Sache auch so aufziehen, daß der Bewegungsbegriff, wie im Erlanger Programm, im Vordergrund steht. Dies hat van der Waerden (geb. 1903) in seinem schönen Buch *Die logischen Grundlagen der euklidischen Geometrie* (Nordhoff, Groningen, 1937), gezeigt. Die Genialität Hilberts zeigt sich dadurch, daß er die Grundlagen der Geometrie auch in einer anderen Richtung, nämlich in der Richtung von Riemann, Helmholtz und Lie, rein mengentheoretisch – topologisch – untersucht hat, im Anhang 4, ohne Benützung von Differenzierbarkeitseigenschaften, wie dies bei Lie der Fall ist. Die Bewegungen werden nur als umkehrbar-eindeutige Transformationen der Ebene in sich mit gewissen zusätzlichen Eigenschaften, vor allem, daß sie eine Gruppe bilden, definiert. Der höher-dimensionale Fall ist erst von Montgomery und Tits u.a. vor einigen Jahren gelöst worden.

Man könnte die drei Systeme von Dingen auf eine Menge reduzieren, indem z.B. die Ebenen und Geraden als Menge von Punkten aufgefaßt werden. Dies hat

---

*) Ein natürlicher Aufbau für einen Teil der Geometrie bei M.Geiger (1880 - 1938), einem Schüler von E. Husserl.

man später auch getan. Es hat sich herausgestellt, daß dieses Axiomsystem noch auf andere Art vereinfacht werden konnte, daß manches nicht ganz korrekt war und verbessert werden mußte. Dies ist das Verdienst u.a. von A. Schmidt, dem Statistiker A. Wald, Hessenberg und insbesondere Paul Bernays, der auch noch die 10. Auflage (1968) besorgt hat. Dieses Werk ist auch heute noch sehr gut lesbar. Das 4. Kapitel behandelt die Lehre von den Flächeninhalten Sehr wichtig sind auch die Kapitel über den Desarguesschen und den Pascalschen (Pappusschen) Satz und, vor allem für den Lehrer, das 7. Kapitel, die geometrischen Konstruktionen. Auch die fünf Anhänge sind von grundlegener Bedeutung.

Die axiomatische Methode von Euklid, bzw. von Hilbert wurde dann auch auf andere Gebiete angewendet: auf die Mechanik durch Hamel (1877-1954) (Newton hatte ja seine Mechanik bereits nach der Methode von Euklid formuliert).

In diesem Zusammenhang darf vielleicht auch Boltzmann (1844-1906) zitiert werden. Für die Thermodynamik hat es Carathéodory (1873-1950) durchgeführt, für die spezielle Relativitätstheorie H. Rothe (1882–1925) der hier an der Technik gewirkt hat, zusammen mit Ph. Frank. Für die Strahlungstheorie und die allgemeine Relativitätstheorie Hilbert, für die Quantentheorie J. von Neumann (1903-1957) Nordheim und Hilbert, für die Ethik Karl Menger (1902-1984) nachdem Spinoza (1632 - 1677) eine solche Ethistik im Anschluß an Euklid verfaßt hatte. Hilbert hat immer darauf hingewiesen, daß eine Axiomatik für die Wahrscheinlichkeitsrechnung fehlt. Eine solche Axiomatik wurde dann von verschiedenen Autoren aufgestellt, ich erwähne nur v. Mises (1883-1953). Am meisten durchgesetzt hat sich jene von Kolmogoroff (geb.1903), die die Wahrscheinlichkeit als additives Maß in einem Raum mit Gesamtmaß 1 auffaßt. Diese Auffassung wird ja heute auch in der Schule tradiert, wobei die Elemente des Raumes Ereignisse genannt werden. In der Algebra wurde die Axiomatik in der großen (128 Seiten langen) Arbeit von E. Steinitz (1871 – 1928): *Algebraische Theorie der Körper* (1916) im Crelleschen

Journal voll verwirklicht. Diese Arbeit wurde 1930 von H. Hasse und R. Baer (1902-1979) mit sehr lesenswerten Kommentaren herausgegeben. Diese halbvergessene Arbeit wurde erst durch die Vorlesungen von Emmy Noether (1882-1935) in Göttingen und von E.Artin (1898-1962) in Hamburg einem größeren Publikum bekannt, vor allem, nachdem sie von van der Waerden unter dem Titel *Moderne Algebra* in zwei Bänden erschienen waren. Die Bedeutung dieser Vorlesungen für die Entwicklung der Mathematik kann kaum überschätzt werden. Den Höhepunkt erreicht die Axiomatisierung bei Bourbaki (seit 1939), dessen Autoren sich die Aufgabe stellten, die gesamte Mathematik samt ihrer Teilgebiete zu axiomatisieren. Eine Einführung in den ganzen Problemkreis bei E. Hlawka, Ch. Binder, P. Schmitt, "Grundbegriffe der Mathematik" , Prugg-Verlag Wien (1979). Natürlich stellt sich dabei das Problem, für diese Axiome einen Träger, d.h. ein Modell oder ein Kollektiv, wie immer man das auch nennen mag, zu finden, d.h. mit anderen Worten, nachzuprüfen, ob das System widerspruchsfrei ist. Diese Problematik ist oft aus Freude darüber daß es z.B. nicht mehr notwendig ist, einen Punkt oder eine Gerade zu definieren daß es genügt, die Relationen zwischen ihnen anzugeben, übersehen worden. Es schien sozusagen die ganze Metaphysik der Anschauung aus den Hallen der reinen Mathematik hinausgeworfen, nur mehr ein Problem für die Anwendung der Mathematik zu sein. Nur Hilbert selber, der doch die Geometrie von der Anschauung abgeschnitten hatte, war sich der Problematik voll bewußt.

Die Widerspruchsfreiheit der euklidischen Geometrie konnte ja einfach durch die Methode von Descartes auf die Widerspruchsfreiheit der Analysis zurückgeführt werden. Es war ein relativer Widerspruchsfreiheitsbeweis (WFB). Bei der Analysis war eine solche Methode, wie Hilbert mit aller Schärfe bemerkte, nicht mehr möglich. Zunächst war es notwendig, eine Axiomatik für die Analysis, d.h. für die reellen Zahlen aufzustellen.Hier hatten ja schon Martin Ohm und andere vorgearbeitet. diese Axiomatik mußte natürlich auch Axiome über die natürlichen Zahlen enthalten. Solche waren schon von Dedekind und Peano aufgestellt worden. Nun kommen aber in diesen Axiomen unendliche Mengen vor. Es erwies sich nun als notwendig, auch eine Axiomatik für die Mengenlehre aufzustellen. Dies hat als erster Zermelo (1871 - 1953) getan. Um nun einen WFB zu führen, mußten auch die Beweismethoden untersucht werden. Dies bedingte eine Axiomatik der Logik. Für den Aussagenkalkül hatte dies bereits G. Boole (1815 - 1864), für den Prädikatenkalkül Peano getan. Ein erster Versuch, Logik und Mathematik zusammen aufzubauen und zu formalisieren, stammt von Russell (1872 - 1970) und Whitehead (1871 - 1947) in der *Principia mathematica*.

Hilbert stellte sich nun die Aufgabe, aufgrund all dieser Vorarbeiten einen WFB für die Analysis zu führen, und zwar innerhalb des Systems. Um überhaupt über dieses System sprechen zu können, mußte eine Metasprache und neue Zeichen eingeführt werden (Am Anfang war das Zeichen!). Das Wichtigste war natürlich das Unendliche durch endliche Symbole einzufangen, so wie die unendlich fernen Punkte in der Ebene durch homogene Koordinaten. Beim Beweisansatz, den Hilbert brachte, versuchte er gleichzeitig eine Wohlordnung der reellen Zahlen zu finden, und das ist nur möglich mit einer gleichzeitigen Hinzunahme des Auswahlaxioms und einem Beweis ihrer Widerspruchsfreiheit und einem Beweis der Kontinuumshypothese. Also ein gewaltiges Programm, aber Hilbert hoffte, dadurch eine Erleichterung des Problems zu erreichen. Wir wissen heute, seit den Gödelschen Sätzen, daß dieses Programm nicht voll erreicht werden kann. Diese hochtheoretischen Überlegungen, bei denen unter anderen Bernays (1888 - 1977) und von Neumann mitgewirkt haben, haben bei der Entwicklung und Benützung des Computers reiche Früchte getragen.

Computer

Wir haben schon früher über Rechenmaschinen gesprochen: Lullus, Pascal, Leibniz, Babbage (1792-1871) und Lady Lovelace (1815 - 1852)), die Tochter von Lord Byron, über die es auch ein hochinteressantes Buch von Doris Moore gibt*, haben sich mit diesem Thema beschäftigt. Es war John von Neumann, der die vorher genannten Methoden der formalen Logik mit der hochentwickelten Elektronik verbunden hat.

Man kann bei der Entwicklung drei Stufen unterscheiden: Zunächst war es die Aufgabe, Signale in binärer Form zu kodieren. Der zweite Schritt bestand darin, durch Verwendung formaler Sprachen, wie sie in der Metasprache von Hilbert vorlag, die Anwendungen des Computers zu erweitern, die Maschinenbefehle in Form von Programmiersprachen zu übersetzen und dann wieder zurückzuübersetzen (kompilieren). Dem Traum einer Universalsprache versucht man näherzukommen. Die dritte Stufe besteht darin, Netzwerke einzurichten, um gleichzeitig auf dem Rechenwerk Algorithmen ablaufen zu lassen und um die Leistungsfähigkeit von Computern zu erhöhen, nach dem Motto: *Wenn sich ein Problem auf einer Maschine nicht lösen läßt, nehme man eine größere.* Die jetzigen Computer, die von Jahr zu Jahr, fast von Woche zu Woche, besser, billiger und leistungsfähiger werden, sind wirklich ein Triumph der Elektronik und es ist durchaus zu begrüßen, daß sich auch die Schule damit auseinandersetzt, da schon die Jugend mit dem Computer spielt. Dies tun auch Erwachsene gern, indem sie z.B. $\sin\alpha$ berechnen.

In diesem Zusammenhang möchte ich auf ein Buch hinweisen, das von zwei Fachleuten, Seidel und Bulirsch, mit dem Titel *Vom Regenbogen zum Farbfernsehen*++) und zwar auf den Artikel: *Berechnung des Sinus*. Dort zeigen sie, wie man $\sin\alpha$ (α irgendeine Zahl z.B. 600 Bogengrad) berechnet. Man muß zunächst den Winkel

* Doris Langley Moore, Ada, Countess of Lovelace, John Murray, London 1977

++) herausgegeben von Springer Verlag 1986 auf das Intervall $[-\pi, \pi]$ reduzieren (1. Schritt), das erfordert Division durch 2π. Dann kann man es mittels der Formel

$$\sin 3\beta = 3\sin\beta - 4\sin^3\beta$$

nochmals auf das Intervall $[-\frac{\pi}{6}, +\frac{\pi}{6}]$ reduzieren. Ein schönes Beispiel, wie wertvoll trigonometrische Formeln für den Computer sind. Dieses Verfahren funktioniert ganz gut, wenn der 1. Schritt nicht zu oft vorkommt. Auf die weitere Fortführung wollen wir nicht mehr eingehen, sondern nur auf das Buch verweisen. Aber für große Werte (z.B.$\alpha = 600$) führt schon der erste Schritt beim Taschenrechner zu wertlosen Resultaten, weil das Rechenwerk nur eine endliche Stellenzahl hat und π irrational ist. Wie die Verfasser sagen, ist diese Rechnung ($\sin 600$) auf dem Taschenrechner daher nicht erlaubt, wenn man nicht Kunstgriffe anwendet (mehrfache Arithmetik).

Noch ein 2. Beispiel: Die Berechnung der harmonischen Reihe,die divergent ist (wie schon Nikolaus von Oresme gezeigt hat), hat auf dem Taschenrechner den Wert $1, 2, 3 \cdots$. Ruft man die Mathematik zu Hilfe, die aussagt daß $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln n + C + O(\frac{1}{n})$ so kann der Computer jetzt wirkungsvolle Arbeit leisten.

Aus diesen Beispielen geht schon hervor, wo die Maschine Schwierigkeiten hat, bei Irrationalzahlen und bei unendlichen Prozessen überhaupt, auch wenn sie nur potentiell unendlich sind. Prof. Zemanek, der in Österreich die erste Rechenmaschine - Mailüfterl genannt - konstruiert hat, hat dies in seinem Vortrag - bei der Gründung der Computergesellschaft – mit dem Titel *Die Informationsverarbeitung und ihre Widersprüche* (Vortrag anläßlich der Gründungsversammlung der Österreichischen Computergesellschaft am 4. März 1975) so ausgedrückt: *Der Maschine fehlt der vertraute Umgang des Menschen mit dem Unendlichen.* Man hört oft, daß der Computer den Menschen und insbesondere den Mathematiker ersetzen kann. Nun braucht die Maschine, um *sinnvoll* zu arbeiten, ein Programm. Das muß natürlich von jemandem erstellt werden. Es sind immer wieder neue

Computer

Programme erforderlich. Man könnte nun sagen, man sammelt alle Programme in einer Programmbibliothek, die Ordnung dieser Bibliothek erfolgt durch ein Programm, wobei das Programmbibliotheksprogramm sich selbst wieder einordnen muß. Damit wäre die Sache erledigt.

Nach dem Satz von Gödel kann man aber immer ein Problem finden, das auf keines der vorhandenen Programme paßt. Das ist vielleicht nicht einmal so entscheidend. Aber, wie Zemanek auch an anderen Stellen ausgeführt hat: Nur der Mensch hat die Fähigkeit sinnvolle Fragen zu stellen und festzustellen, ob die Voraussetzungen des Programms der verwendeten Maschine für sein Problem überhaupt zutreffen und nach Beendigung der Rechnung durch den Computer festzustellen, ob die Antwort das Problem löst oder nicht löst. Das Resultat braucht nicht zu stimmen, weil die Voraussetzungen nicht richtig waren.

In letzter Zeit wurden auch Apparate (Lisp genannt, z.B. HP 28C) entwickelt, die symbolische, nicht nur digitale Rechnungen durchführen können, also algebraische Umformungen, Integrationen von elementaren Funktionen durch elementare Funktionen und Integration von Differentialgleichungen durch elementare Methoden durchführen können. Sie können also bei Berechnung unbestimmter Integrale Substitutionen oder auch Ketten von Substitutionen finden, die eine elementare Berechnung des Integrals gestatten. Diese Maschine kann einer nicht geübten Person weit überlegen sein, dagegen wird der geübte Mathematiker viel rascher eine passende Substitution finden, genauso, wie dies bei einem Schachcomputer der Fall ist.

Ein ganz anderer Gesichtspunkt erscheint mir noch viel wichtiger. Mathematische Theorien, die bis jetzt als unwichtig erschienen sind, haben jetzt eine ungeheure Bedeutung gewonnen. Die Maschine braucht Kriterien, wann ein Integral von elementaren Funktionen wieder durch elementare Funktionen integrierbar ist. Dies hat als erster Liouville (1850) geleistet. Zu seiner Methode wurde er durch die berühmte Arbeit von Abel abgeregt, der alle Wurzeln klassifiziert hat, um zu zeigen, daß die allgemeine Gleichung 5. Grades nicht durch Radikale lösbar ist. Liouville teilt die elementaren Funktionen so ein.

Elementare Funktionen O-ter Stufe (K_o) sind die algebraischen Funktionen h, 1. Stufe (K_1) sind die Monome e^f und $\log g$, wo $f, g \in K_o$ und alle algebraischen Funktionen von $f_1 = e^f, g_1 = logg$ und h_1 die nicht bereits in K_o liegen. K_2 sind die Funktionen $f_2 = e^{f_1}, g_2 = logg_1$ und alle algebraischen Funktionen davon, die nicht bereits in K_o oder K_1 liegen, usw.

Die trigonometrischen Funktionen und ihre Umkehrfunktionen brauchen nicht extra aufgeführt werden, da diese Funktionen sich aufgrund der Eulerschen Beziehungen durch e^z bzw. lnz ausdrücken lassen. Betrachten wir ein Beispiel eines Liouvilleschen Satzes: Ein Integral der Form

$$\int e^{g(x)}.h(x)dx$$

wo $g, h \in K_o$, ist nur dann elementar integrierbar, wenn das Integral die Gestalt hat $e^{g(x)}.w(g, h, x)$ wo w eine rationale Funktion ist. Es müßte z.B.

$$\int e^{-x^2}dx$$

die Gestalt haben $e^{-x^2}.w(x)$. Durch Differenzieren erhält man für $w: w' - 2xw = 1$. Man sieht sofort, daß diese Gleichung nicht durch ein Polynom vom Grad n lösbar ist, denn dann hätte w' den Grad $n-1$ und xw den Grad $n+1$, was nicht möglich ist. Wäre w kein Polynom, so hätte es eine ∞-Stelle, w' eine ∞-Stelle um eine Ordnung höher, was auch nicht geht. Auch dieses Beispiel genügt bereits zu zeigen, daß der Mensch nicht vom Computer ersetzt werden kann.

Wie wird das weitergehen? Wichtige Rollen spielen folgende Gebiete schon jetzt und sie werden weiter ausgebaut werden müssen: Kombinatorik, Diskrete Mathematik, Graphentheorie, Zahlentheorie, Approximation irrationaler Zahlen durch rationale Zahlen, Approximation von Funktionen durch Polynome oder durch rationale Funktionen, Algebra, Stabilitätstheorie und Modelltheorie.

Wenn auch keine Maschine jemals mit sämtlichen Ziffern von irrationalen Zahlen arbeiten kann, so kann sie doch mit ihren Symbolen arbeiten. wie sie auch nie Grenzprozesse ausführen kann, so kann sie mit den Symbolen und Regeln der Analysis, soweit es sich um endlich viele Operationen handelt, operieren.

Epilog

Der Vortrag konnte in der vorgeschriebenen Zeit von 50 Minuten die Dinge nur streifen. Auch dem Manuskript waren im Umfang Grenzen gesetzt. Es sollte nur gezeigt werden, daß die Mathematik nicht trocken ist, sondern, daß sie eine faszinierende Wissenschaft ist, voller Rätsel und Probleme. E.Lasker, der berühmte Schachmeister und Mathematiker, hat die Mathematik (noch vor Gödel) eine *unvollendbare* Wissenschaft genannt (im Anschluß an den Philosophen Bergson).

Ich wäre noch gerne ausführlich auf die Geschichte der Mathematik und ihrer Ideen eingegangen. Auch das war in dem gegebenen Rahmen unmöglich. Eine Ergänzung zu diesem Vortrag findet sich in meinem Artikel, *Mathematica, quo vadis*, Wissenschaftliche Nachrichten 1979, 25-29, und eine erweiterte Fassung im ÖMG-Didaktik-Heft 8 (1982), 33-54. Hinweisen möchte ich auch auf das Buch von H.Kaiser – W.Nöbauer *Geschichte der Mathematik für den Schulunterricht*, Hölder – Pichler – Tempsky, Wien; Freytag, München, 1984. Es soll doch hervorgehoben werden, daß noch viele Entwicklungsphasen im Dunkeln liegen. Bei den regelmäßig stattfindenden Tagungen über Geschichte der Mathematik im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach (im Schwarzwald) wird fortlaufend über die neuesten Untersuchungen berichtet. Es ist nun gelungen auch in Österreich

Computer

eine ähnliche Tagung durchzuführen (Neuhofen an der Ybbs, November 1986, organisiert von Frau Dr.Christa Binder), die von prominenten Forschern aus der ganzen Welt besucht wurde. Es ist zu hoffen, daß daraus eine ständige Einrichtung wird. Österreich, das in seinen Klöstern und Schlössern so viele Schätze auf diesem Gebiet aus dem Mittelalter besitzt, hat hier einen großen Rückstand aufzuholen.

Der Zweck meines Vortrages bestand auch darin, zu zeigen, daß die These von Oswals Spengler in seinem Werk *Untergang des Abendlandes* nicht richtig ist, daß die Mathematik der Antike grundsätzlich verschieden ist von der Mathematik der Neuzeit. Im Gegenteil: Es liegt eine kontinuierliche Entwicklung vor, die allerdings durch Katastrophen gehemmt worden ist.

Zum Schluß möchte ich noch Frau Dr.Binder und Frau M. Fürst für die Herstellung des Manuskripts danken. Ohne ihre Mitwirkung hätte es nicht entstehen können. Für Anregungen danke ich Frau Ostr.Dr.M.Müller, Herrn Prof. Zemanek und Herrn Dr. F.Firneis. Auch den Organisatoren dieses Lehrerfortbildungstages danke ich herzlich für die Erlaubnis, meine Ideen zur Entwicklung der Mathematik darzulegen.